

Vaccination and Treatment in Predator-Prey with Two Kind of Predator, One of Which is Infected

Vaksinasi dan *Treatment* pada *Predator-Prey* dengan Dua Jenis Pemangsa yang Salah satunya Terinfeksi

Khozin Mu'tamar^{a,*}, Dinita Rahmalia^b, Sutimin^c

^a*Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Riau*

^b*Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Islam Darul Ulum*

^c*Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Diponegoro*

*Corresponding author: khozin.mutamar@unri.ac.id

Abstract

Predator-prey is a mathematical model to describe the interaction behavior of two species, one as predator and the other as prey. The predator population is at a higher level than the prey population in the food chain. Therefore, the predator has a small population and vulnerable to extinction because of infection or competition. In this article, we propose a modified predator-prey model with two kinds of predators, one of which is infected. To prevent the spread of infection, treatment and vaccination are considered, formulated using Pontryagin Minimum Principle (PMP). Stability analysis is done locally to show the effect of vaccination and treatment on stability. Numerical simulation is done to illustrate the behavior of our model and to show vaccination and treatment performance in dealing with an infection. The simulation result shows that vaccination and treatment succeed to control the spread of infectious in predator population and control both predator and prey population growth.

Keywords: *Predator-prey model, infected predator, optimal control, vaccination, treatment*

Abstrak

*Predator-prey adalah model matematika yang menggambarkan perilaku interaksi dua spesies, satu diantaranya merupakan pemangsa dan satu lainnya sebagai mangsa. Populasi pemangsa biasanya berada di level lebih atas dibandingkan level mangsa pada rantai makanan. Oleh karena itu, populasi pemangsa lebih sedikit dan rentan akan kepunahan baik karena penyakit ataupun kalah persaingan. Pada artikel ini, dikembangkan model *predator-prey* dengan dua jenis pemangsa dan salah satunya terinfeksi penyakit. Untuk mencegah penyebaran, diberikan tindakan vaksinasi dan pengobatan yang dirumuskan menggunakan *Pontryagin Minimum Principle* (PMP). Analisis kestabilan dilakukan secara lokal untuk menunjukkan tindakan vaksinasi dan pengobatan berpengaruh terhadap sifat kestabilan. Simulasi dilakukan secara numerik guna melihat perilaku model dan performa vaksinasi dan treatment yang diberikan. Hasil simulasi menunjukkan bahwa pemberian vaksinasi dan treatment pada populasi pemangsa dapat meredam penyebaran infeksi dan mengendalikan pertumbuhan populasi baik populasi pemangsa maupun populasi mangsa.*

Kata kunci: *Model predator-prey, predator terinfeksi, optimal control, vaksinasi, treatment*

Pendahuluan

Interaksi antar individu pada habitat terbuka merupakan hal yang lazim terjadi. Interaksi yang terjadi dapat menimbulkan aneka ragam dampak, salah satunya bersifat *predator-prey* yang terjadi karena pemangsa yang berada di level atas rantai makanan berinteraksi dengan populasi mangsa. Terjadinya interaksi penting untuk menjaga keberlangsungan hidup populasi pemangsa dan juga sebagai bentuk pengendalian jumlah pertumbuhan populasi mangsa.

Pada sebuah habitat, dimungkinkan beberapa pemangsa hidup bersamaan dan memburu mangsa yang sama. Kehadiran pemangsa kelompok lain merupakan gangguan bagi pemangsa jenis lainnya. Perebutan wilayah dan makanan menjadi salah satu faktor terjadinya persaingan yang dipengaruhi oleh jumlah kawan dan tingkat kesehatan masing-masing kelompok.

Penelitian terkait *predator-prey* yang melibatkan infeksi telah banyak dilakukan. Han *et al.* (2001) dan Bera *et al.* (2015) meneliti *predator-prey* dengan infeksi pada kedua populasi yang penyebarannya mengadopsi prinsip model epidemi Susceptible, Infectible dan Removed (SIR). Hugo *et*

al. (2012) membentuk *predator-prey* dengan infeksi pada kedua populasi dengan mempertimbangkan adanya pengobatan (*treatment*), dimana populasi yang diberi *treatment* dialokasikan dalam satu kelompok baru yang terpisah. Rida *et al.* (2014) mengembangkan *predator-prey* dengan menggunakan persamaan diferensial fraksional berdasarkan bentuk Caputo yang dianalisis secara numerik menggunakan Generalized Euler Method (GEM). *Predator-prey* dengan infeksi berupa parasit yang hanya menyebar pada populasi pemangsa diteliti oleh Das (2011). Pada pembahasannya, dianalisis kestabilan sistem menggunakan bilangan reproduksi dan diamati kondisi Hopf bifurcation. Penggunaan bilangan reproduksi dalam menganalisis endemi pada populasi yang mengalami infeksi, khususnya model *predator-prey* juga dilakukan oleh Bate dan Hilker (2013).

Penggunaan *predator-prey* dengan infeksi tidak hanya pada populasi makhluk hidup. Sooknanan *et al.* (2017) menerapkan konsep ini pada interaksi antara polisi sebagai pemburu atau pemangsa dan kelompok kriminal sebagai mangsanya. Pada bidang komputer, Shukla *et al.* (2014) mengamati jaringan komputer terinfeksi

dan menjadikan komputer sebagai mangsa dan virus sebagai pemangsanya sedangkan Dash *et al.* (2015) mengamati jaringan IaaS pada lingkungan komputasi berbasis cloud dan menerapkan *predator-prey* untuk mendeteksi adanya ancaman pada jaringan. Terakhir, *predator-prey* juga dimanfaatkan untuk mengamati pertumbuhan beberapa jenis virus komputer di dalam sebuah komputer pada Kumar *et al.* (2016).

Beberapa penelitian terdahulu hanya menggunakan satu jenis populasi pemangsa pada modelnya. Infeksi yang terjadi pada populasi juga ditangani dengan treatment dan vaksinasi secara terpisah. Beberapa diantaranya hanya melakukan treatment atau vaksinasi dengan membuat variabel baru yang terpisah dari populasi awal. Pada artikel ini dibahas *predator-prey* dengan dua jenis pemangsa dan satu mangsa. Kedua pemangsa berada pada level rantai makanan yang sama sehingga tidak terjadi predasi di populasi pemangsa. Salah satu jenis pemangsa terinfeksi penyakit, yang penularannya melalui interaksi antar pemangsa sejenis. Mangsa dalam model ini adalah mangsa bagi kedua jenis pemangsa dengan tingkat predasi yang sama. Tujuan yang ingin dicapai adalah menganalisis

perkembangan populasi di sebuah habitat, yang dihuni oleh dua jenis pemangsa yang berbeda namun memburu satu jenis mangsa yang sama. Juga diamati tingkat pengaruh kehadiran jenis populasi lain dalam habitat terhadap pertumbuhan populasi pemangsa. Infeksi yang terjadi pada salah satu populasi pemangsa akan diatasi dengan pemberian treatment yang diberikan kepada populasi yang telah terjangkiti dan vaksinasi diberikan kepada populasi pemangsa yang masih sehat. Tindakan ini dilakukan secara bersamaan dengan menggunakan fungsi kontrol optimum berdasarkan prinsip *pontryagin minimum principle*.

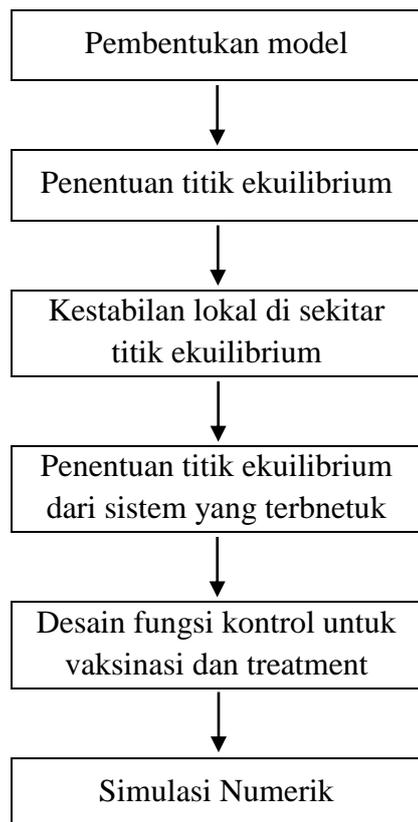
Metode Penelitian

Artikel ini merupakan penelitian bersifat studi literatur dan simulasi numerik. Secara garis besar, langkah penelitian ditunjukkan pada Gambar 1.

Pertama, dikaji model-model yang telah dilakukan yang melibatkan infeksi pada pemangsa. Model baru yang dikembangkan merupakan modifikasi berupa penambahan komponen yang terlibat dalam perumusan model dan disertai adanya vaksinasi dan tindakan pengobatan.

Langkah selanjutnya adalah menganalisis kestabilan model yang

telah terbentuk secara lokal di sekitar titik ekuilibrium dan melihat apakah nilai kontrol sebagai bentuk pengobatan dan vaksinasi berpengaruh pada kestabilan model. Pada bagian ini hanya diamati beberapa kasus khusus, terutama kondisi ekuilibrium punahnya infeksi pada populasi pemangsa.



Gambar 1. Diagram alur penelitian

Langkah berikutnya adalah menentukan fungsi kontrol optimum sebagai tindakan vaksinasi dan pengobatan pada populasi pemangsa. Pada penentuan kontrol optimum, didefinisikan fungsi *cost* yang dipengaruhi oleh jumlah populasi dan nilai kontrol yang akan diberikan. Pada

bagian ini, ditentukan nilai kontrol $u(t)$ dan juga fungsi *costate*.

Terakhir, melakukan simulasi numerik menggunakan komputer untuk menunjukkan hasil kajian secara grafikal. Nilai parameter yang digunakan merupakan nilai-nilai yang diasumsikan nilainya. Nilai-nilai ini dipilih sesuai kondisi yang harus dipenuhi berdasarkan bagian analisis kestabilan. Pada simulasi juga dibandingkan model tanpa adanya kontrol dan model dengan menggunakan kontrol. Penggunaan kontrol pada simulasi dibagi dua yaitu kontrol penuh setiap waktu dan kontrol yang didasarkan pada hasil desain kontrol pada bab sebelumnya.

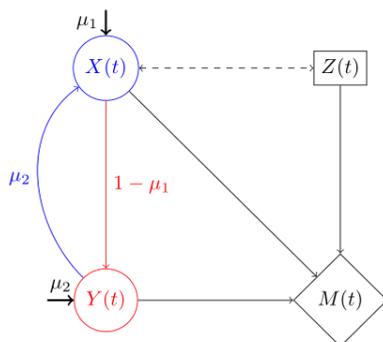
Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini akan dibahas model *predator-prey* dengan dua *predator* yang salah satunya terinfeksi penyakit. Sistematika pembahasan didasarkan pada alur pada Gambar 1.

Pembentukan Model

Misalkan pada sebuah kawasan Ω dihuni oleh tiga populasi berbeda, yaitu populasi pemangsa jenis pertama, pemangsa jenis kedua dan populasi mangsa. Hubungan antara pemangsa jenis pertama dan kedua adalah

persaingan yang diasumsikan merugikan bagi keduanya. Mangsa adalah makanan bagi kedua jenis pemangsa. Pada kawasan ini, terdapat sebuah penyakit menular yang hanya menyebar pada populasi pemangsa jenis pertama. Penyebarannya diakibatkan oleh interaksi antara individu yang sehat dan individu yang telah terjangkit oleh penyakit. Selanjutnya, didefinisikan $X(t)$ adalah pemangsa jenis pertama yang masih sehat, $Y(t)$ adalah pemangsa jenis pertama yang telah terjangkit penyakit, $Z(t)$ adalah pemangsa jenis kedua dan $M(t)$ adalah mangsa bagi kedua jenis pemangsa. Penyebaran pemangsa $X(t)$ dan $Y(t)$ terjadi secara merata sehingga tidak ada dikotomi wilayah. Relasi antara ketiga populasi di kawasan Ω diberikan dengan skema pada Gambar 2.



Gambar 2. Skema interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa

Infeksi penyakit akan mempengaruhi kemampuan bertahan

hidup pemangsa jenis pertama. Pemangsa $Y(t)$ masih sanggup untuk berburu makanan namun tidak lagi mampu bersaing dengan pemangsa jenis kedua.

Penanggulangan penyakit dilakukan dengan dua strategi, yaitu pengobatan dan vaksinasi. Pengobatan adalah tindakan pemberian obat kepada populasi pemangsa yang telah terinfeksi penyakit sedangkan vaksinasi adalah tindakan pemberian obat kepada populasi pemangsa sehat agar memiliki imunitas terhadap penyakit. Tindakan vaksinasi tidak sepenuhnya membuat populasi pemangsa kebal terhadap penyakit namun membuat lebih bertahan ketika infeksi menyerang.

Berdasarkan asumsi dan definisi yang telah dijabarkan, didefinisikan model *predator-prey* yang telah dimodifikasi pada persamaan (1).

$$\begin{cases} \dot{X} &= -a_1(1 - \mu_1)XY + \mu_2Y + a_2XM - a_3X \\ \dot{Y} &= a_1(1 - \mu_1)XY - \mu_2Y - b_2Y - b_3Y \\ \dot{Z} &= d_1ZM - d_2Z \\ \dot{M} &= \beta M - c_1XM - c_3ZM \end{cases} \quad (1)$$

dengan

- a_1 : Laju sukses infeksi akibat interaksi antara populasi pemangsa jenis pertama yang sehat dan yang telah terinfeksi
- a_2, d_1 : Proporsi laju pertumbuhan populasi pemangsa jenis pertama yang sehat dan

- pemangsa jenis kedua karena proses predasi
- c_1, c_3 : Proporsi laju penurunan populasi mangsa akibat predasi oleh pemangsa jenis pertama yang sehat, pemangsa jenis pertama yang telah terinfeksi, dan pemangsa jenis kedua
- β : Proporsi laju pertumbuhan proporsional dari populasi mangsa
- μ_1 : Kontrol vaksinasi terhadap populasi pemangsa jenis pertama yang sehat agar memiliki imunitas terhadap infeksi
- μ_2 : Kontrol treatment terhadap populasi pemangsa jenis pertama yang terinfeksi untuk proses penyembuhan
- a_3, b_2, d_2 : Proporsi laju kematian populasi pemangsa akibat tidak adanya mangsa
- b_3 : Proporsi laju kematian populasi pemangsa jenis pertama yang telah terinfeksi akibat infeksi yang diderita

$$\begin{aligned}
 a_2 X (M - a_3) &= 0 \\
 (d_1 M - d_2) Z &= 0 \\
 (\beta - c_1 X - c_3 Z) M &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

Solusi (X^*, Y^*, Z^*, M^*) dari

persamaan (2) diberikan oleh:

Titik ekuilibrium bebas populasi

$$x_1 = (0, 0, 0, 0) \tag{3}$$

Titik ekuilibrium punahnya populasi pemangsa jenis kedua bersamaan dengan punahnya populasi jenis pertama yang terinfeksi oleh penyakit.

$$x_2 = \left(\frac{\beta}{c_1}, 0, 0, \frac{a_3}{a_2} \right) \tag{4}$$

Titik ekuilibrium punahnya populasi pemangsa jenis pertama akibat infeksi penyakit

$$x_3 = \left(0, 0, \frac{\beta}{c_3}, \frac{d_2}{d_1} \right) \tag{5}$$

Titik ekuilibrium ini dapat terjadi karena gagalnya proses vaksinasi dan treatment yang dilakukan pada pemangsa jenis pertama. Akibat pengobatan yang gagal, infeksi penyakit terus menyebar diantara populasi pemangsa jenis pertama sehingga daya dukung populasi jenis pertama terus berkurang. Akibatnya, persaingan dengan pemangsa jenis kedua dan pengurangan populasi akibat kematian oleh infeksi mengakibatkan punahnya pemangsa jenis pertama.

Analisis Kestabilan Lokal

Langkah pertama adalah menentukan titik ekuilibrium dari sistem persamaan (1). Model ini memiliki $2^4 = 16$ kemungkinan titik ekuilibrium. Namun, pembahasan akan dibatasi pada beberapa jenis titik ekuilibrium, yaitu kondisi dimana populasi pemangsa jenis pertama yang terinfeksi punah atau $Y = 0$. Jika disubstitusikan $Y = 0$ pada persamaan (1) dan menolkan ruas kiri akan diperoleh

Untuk keperluan analisis kestabilan secara lokal, sistem persamaan (1) perlu untuk dilinearisasi. Matriks Jacobian dari sistem persamaan (1) adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_1(1-\mu_1)X + \mu_2 & 0 & a_2X \\ a_1(1-\mu_1)Y & a_{22} & 0 & b_1Y \\ 0 & 0 & d_1M - d_2 & d_1Z \\ -c_1M & 0 & -c_3M & \beta - c_1X - c_3Z \end{bmatrix} \quad (6)$$

dengan $a_{11} = -a_1(1-\mu_1)Y + a_2M - a_3$ dan $a_{22} = a_1(1-\mu_1)X - \mu_2 - b_2 - b_3$.

Teorema 1. Titik ekuilibrium x_1 adalah titik ekuilibrium tidak stabil.

Bukti. Substitusikan titik ekuilibrium x_1 persamaan (3) pada matriks A pada persamaan (6) sehingga diperoleh matriks

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a_3 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 - b_3 - b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Nilai eigen dari matriks A_1 pada persamaan (7) adalah

$$\lambda_1 = \{-a_3, -d_2, -(\mu_2 + b_2 + b_3), \beta\}$$

Oleh karena terdapat $\lambda_{1,4} = \beta > 0$ maka sistem persamaan (1) tidak stabil di sekitar titik ekuilibrium x_1 .

Hal ini berarti bahwa ada tidaknya kontrol tidak berpengaruh pada kestabilan di sekitar titik ekuilibrium bebas populasi. Titik ekuilibrium ini merupakan titik tidak stabil yang akan mengalami perubahan hanya dengan

perubahan kecil pada salah satu variabelnya.

Teorema 2. Sistem persamaan (1) stabil di sekitar titik ekuilibrium x_2 jika diberikan kontrol penuh dengan syarat rasio pertumbuhan dengan kematian populasi jenis kedua lebih besar dibandingkan rasio dari pertumbuhan dan kematian populasi pemangsa jenis pertama, atau

$$\frac{a_3}{a_2} < \frac{d_2}{d_1} \quad (8)$$

Bukti. Matriks linearisasi dari persamaan (1) di sekitar titik ekuilibrium x_2 persamaan (4) adalah

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_1\beta(1-\mu_1)}{c_1} + \mu_2 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{a_1\beta(1-\mu_1)}{c_1} - \mu_2 - b_2 - b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_3d_1}{a_2} - d_2 & 0 \\ -\frac{c_1a_3}{a_2} & 0 & \frac{a_2}{a_2} & -\frac{c_3a_3}{a_2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Nilai eigen dari matriks A_2 pada persamaan (9) adalah

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{-\beta a_3} \\ -\sqrt{-\beta a_3} \\ \frac{a_3d_1 - a_2d_2}{a_2} \\ \frac{\beta a_1(1-\mu_1) - c_1(\mu_2 + b_2 + b_3)}{c_1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Kestabilan titik ekuilibrium dari x_2 bergantung pada nilai eigen ketiga dan keempat. Berdasarkan nilai eigen

ketiga dari λ_2 di persamaan (10) akan menghasilkan

$$\frac{a_3}{a_2} < \frac{d_2}{d_1} \tag{11}$$

yang merupakan syarat pada persamaan (8). Berdasarkan nilai eigen keempat dari persamaan (10), diperoleh

$$\beta \frac{a_1}{c_1} (1 - \mu_1) - (\mu_2 + b_2 + b_3) < 0 \tag{12}$$

Jika pada populasi ini diberi kontrol penuh sepanjang waktu, maka berdasarkan persamaan (12) akan dihasilkan

$$-(1 + b_2 + b_3) < 0. \tag{13}$$

Oleh karena $b_2, b_3 \in \mathbb{R}^+$ maka berdasarkan persamaan (11) dan akibat dari persamaan (13) yang berarti bahwa sistem bersifat stabil, teorema terbukti.

Teorema 3. Kestabilan titik ekuilibrium x_3 tidak bergantung kepada kontrol μ_1 dan pemberian kontrol μ_2 akan mempercepat laju konvergensi dari titik kestabilan titik x_3

Bukti. Substitusikan titik ekuilibrium x_3 persamaan (5) pada matriks A pada persamaan (6) akan diperoleh matriks linearisasi untuk x_3 yaitu

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{a_2 d_2}{d_1} - a_3 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 - b_2 - b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_1 \beta}{c_3} \\ -\frac{c_1 d_2}{d_1} & 0 & -\frac{c_3 d_2}{d_1} & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Solusi dari persamaan karakteristik dari matriks persamaan (14) adalah

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{-\beta d_2} \\ -\sqrt{-\beta d_2} \\ -(\mu_2 + b_2 + b_3) \\ \frac{a_2 d_2 - d_1 a_3}{d_1} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Kestabilan sistem ini ditentukan berdasarkan nilai eigen keempat pada persamaan (15). Agar sistem stabil, maka haruslah $\frac{a_2}{a_3} < \frac{d_1}{d_2}$. Kondisi ini menyatakan bahwa agar populasi pemangsa jenis kedua stabil dibutuhkan rasio pertumbuhan dan kematian populasi pemangsa jenis pertama lebih besar dibandingkan rasio pertumbuhan dan kematian populasi pemangsa jenis pertama. Nilai eigen ketiga $-(\mu_2 + b_2 + b_3)$ akan mempengaruhi laju konvergensi menuju titik ekuilibrium. Oleh karena $e^{-(\mu_2 + b_2 + b_3)} < e^{-(b_2 + b_3)}$, jelas bahwa dengan pemberian kontrol akan menghasilkan kestabilan x_3 lebih cepat tercapai dibandingkan tanpa kontrol μ_2 .

Desain Vaksinasi dan Treatment pada Model menggunakan Kontrol Optimum

Pada bagian ini akan ditentukan nilai kontrol optimum μ_1, μ_2 menggunakan Pontryagin Minimum Principle. Untuk keperluan tersebut, didefinisikan fungsional performa indeks yaitu

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T A_1 X^2 + A_2 Y^2 + r_1 \mu_1^2 + r_2 \mu_2^2 dt \quad (16)$$

dengan A_1, A_2 adalah pembobot bagi variabel keadaan X, Y sedangkan r_1, r_2 adalah pembobot dari variabel kontrol μ_1, μ_2 . Untuk meminimumkan fungsional $J(X, Y, \mu_1, \mu_2)$ pada persamaan (16) dengan kendala sistem persamaan (1) didefinisikan persamaan Hamiltonian.

$$H = \frac{1}{2} [A_1 X^2 + A_2 Y^2 + r_1 \mu_1^2 + r_2 \mu_2^2] + \lambda_1 (-a_1(1-\mu_1)XY + \mu_2 Y + a_2 XM - a_3 X) + \lambda_2 (a_1(1-\mu_1)XY - \mu_2 Y - b_2 Y - b_3 Y) \quad (17)$$

dengan λ_1, λ_2 adalah konstanta pengali Lagrange. Untuk menentukan μ_1, μ_2 yang meminimumkan H pada persamaan (17) maka haruslah dipenuhi $\frac{\partial H}{\partial \mu_1} = 0$ dan $\frac{\partial H}{\partial \mu_2} = 0$. Turunan parsial H terhadap μ_1 akan menghasilkan

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_1} = r_1 \mu_1 + a_1 XY (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (18)$$

sehingga menggunakan persamaan (18) diperoleh nilai kontrol optimum μ_1 adalah

$$\mu_1 = \frac{a_1}{r_1} XY (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (19)$$

Selanjutnya, turunan parsial $\frac{\partial H}{\partial \mu_2}$

akan menghasilkan

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_2} = r_2 \mu_2 + Y (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (20)$$

Berdasarkan persamaan (20), nilai optimal H oleh μ_2 terjadi saat

$$\mu_2 = \frac{Y}{r_2} XY (\lambda_2 - \lambda_1) \quad (21)$$

Jika dibatasi bahwa kontrol $\mu_i(t)$ adalah anggota himpunan $U = \{\mu(t) | 0 \leq \mu(t) \leq 1\}$ maka

$$\mu_i^*(t) = \min [1, \max (0, \mu_i(t))] \quad (22)$$

dengan μ_i diberikan pada persamaan (19) dan (21). Nilai $\lambda_i, i=1,2$ diperoleh dari persamaan costate yang merupakan turunan parsial H terhadap seluruh variabel keadaan yang terlibat pada fungsional performa indeks pada persamaan (16). Costate $\lambda_1(t)$

merupakan solusi dari $\frac{\partial H}{\partial X} = -\lambda_1'$,

$$-\lambda_1' = A_1 X + \lambda_1 (-a_1(1-\mu_1)Y + a_2 M - a_3) + \lambda_2 a_1 (1-\mu_1) Y \quad (23)$$

Costate $\lambda_2(t)$ adalah solusi dari $\frac{\partial H}{\partial Y} = -\lambda_2'$,

$$-\lambda_2' = A_2 Y + \lambda_1 (-a_1(1-\mu_1)X + \mu_2) + \lambda_2 (a_1(1-\mu_1)X - \mu_2 - b_2 - b_3) \quad (24)$$

Persamaan (23) dan (24) merupakan sistem persamaan diferensial biasa dengan nilai akhir $\lambda_i(t_f) = 0$. Berdasarkan persamaan (16)-(24) diperoleh dua sub-sistem yang perlu untuk diselesaikan. Penyelesaian sub-sistem ini dilakukan berdasarkan Algoritma 1.

Algoritma 1. Langkah penyelesaian kontrol optimum pada model *predator-prey* dengan infeksi menggunakan metode Euler.

1 : **Input**

Nilai awal $u(t) = 0, x_i(0) = x_0, \lambda_i(t_f) = 0$

Parameter $\Delta t = 1e-3, \text{itmax} = 20$

Euler,

Kontrol

2 : **Perulangan** $i = 1 : \text{itmax}$

1 Selesaikan masalah nilai awal persamaan (1) dengan menggunakan kontrol $u_i(t)$ dengan nilai awal x_0 yang diberikan

2 Selesaikan masalah nilai batas persamaan (23)-(24) dengan menggunakan solusi masalah nilai awal langkah 2.1, dengan nilai batas $\lambda_i(t_f) = 0$

3 Update nilai kontrol menggunakan persamaan (22)

4 Lakukan sampai kriteria terpenuhi

Simulasi Numerik

Pada bagian ini dilakukan simulasi untuk mendapatkan ilustrasi perilaku sistem persamaan (1) yang didapatkan secara numerik. Parameter yang digunakan dalam simulasi diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Parameter untuk simulasi numerik

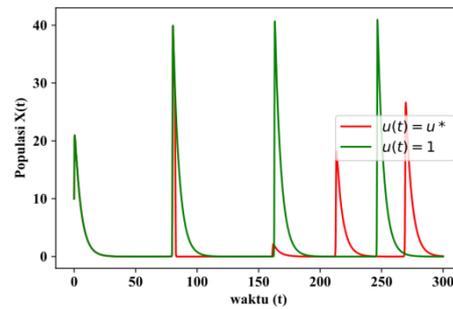
Parameter	Nilai	Parameter	Nilai
A_1	10	α_1	0.03
A_2	10	b_2	0.1
r_1	0.1	b_3	0.1
r_2	0.1	c_1	0.3
β	0.8	c_3	0.3

Simulasi dilakukan menggunakan $t \in [0, 300]$ dengan nilai awal $\{x_0 = 10, y_0 = 3, z_0 = 10, m_0 = 15\}$ dengan beberapa nilai a_2, a_3, d_1, d_2 yang berbeda yang disesuaikan dengan kondisi pada teorema pada bagian analisis kestabilan lokal. Penentuan solusi numerik sistem persamaan (1) dan persamaan (23)-(24) dilakukan dengan menggunakan metode Euler dengan $\Delta t = 1e-3$ yang diimplementasikan dengan python3 dan module numpy berdasarkan Algoritma 1.

Pertama, dipilih parameter $a_2 = 0.4, a_3 = 0.2, d_1 = 0.3, d_2 = 0.2$ yang memenuhi syarat pertama agar titik

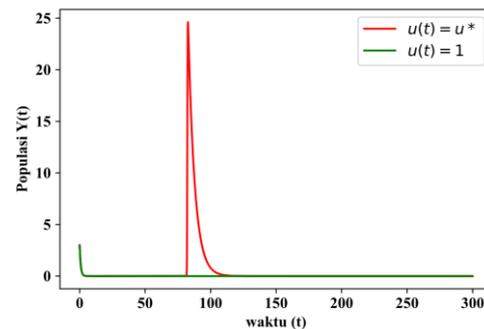
ekuilibrium x_2 stabil. Selanjutnya, simulasi hasil perbandingan perilaku sistem persamaan (1) menggunakan kontrol optimum dan kontrol penuh setiap waktu ditunjukkan pada Gambar 3 sampai dengan Gambar 6. Pada simulasi ini, parameter yang dipilih adalah parameter yang memenuhi kondisi pada Teorema 2 dan dibandingkan antara pemberian kontrol berdasarkan persamaan (22) dan pemberian kontrol secara penuh setiap waktu.

Tampak pada Gambar 3 dan Gambar 4, garis merah merepresentasikan jumlah populasi dengan pemberian kontrol penuh sepanjang waktu sedangkan garis hijau menyatakan jumlah populasi dengan pemberian kontrol sesuai persamaan (22). Sesuai dengan Teorema 2, tampak bahwa populasi pemangsa jenis pertama yang sehat akan tetap bertahan, dimana dengan pemberian kontrol penuh akan membuat jumlah populasi lebih tinggi dibandingkan yang menggunakan kontrol persamaan (22).



Gambar 3. Perbandingan solusi numerik populasi pemangsa jenis pertama yang sehat $X(t)$

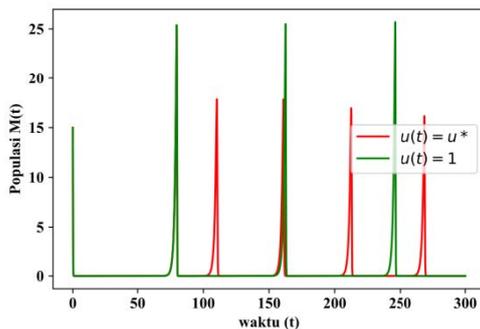
Hal yang berbeda tampak pada populasi pemangsa jenis pertama yang terinfeksi pada Gambar 4, pemberian kontrol penuh menjamin kestabilan titik ekuilibrium sehingga dipastikan tidak ada populasi pemangsa terinfeksi yang tersisa.



Gambar 4. Perbandingan solusi numerik populasi pemangsa jenis pertama terinfeksi $Y(t)$

Sesuai dengan Teorema 2, jika kontrol diberikan penuh maka jumlah populasi pemangsa jenis kedua akan punah. Oleh karena kontrol persamaan (22) tidak bernilai satu sepanjang waktu, maka kondisi Teorema 2 tidak

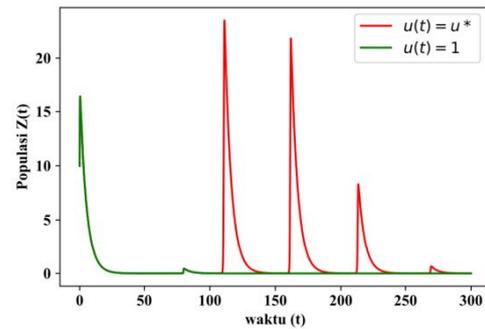
terpenuhi sehingga sejumlah populasi pemangsa jenis kedua masih ada. Pada Gambar 5, jumlah populasi mangsa yang diberi kontrol penuh akan lebih tinggi dikarenakan pengurangan jumlah populasi hanya diakibatkan predasi satu jenis pemangsa saja, yaitu pemangsa jenis pertama.



Gambar 5. Perbandingan solusi numerik populasi mangsa $M(t)$

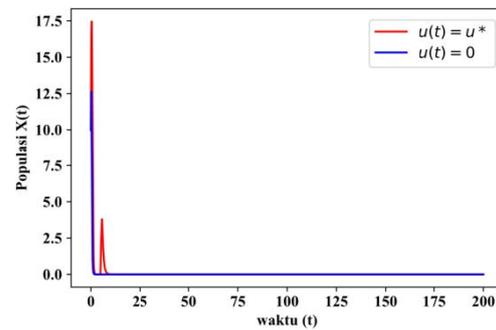
Pada Gambar 6 tampak bahwa pemberian kontrol persamaan (22) tidak membuat salah satu populasi pemangsa punah sehingga berakibat predasi terhadap mangsa lebih tinggi yang mengakibatkan jumlah populasi mangsa pada Gambar 5 akan lebih rendah.

Selanjutnya, dipilih parameter $a_2 = 0.3, a_3 = 0.2, d_1 = 0.4, d_2 = 0.2$ yang memenuhi kondisi kestabilan pada Teorema 3. Berdasarkan Teorema 3, sistem akan stabil di sekitar titik ekuilibrium x_3 dan pemberian kontrol akan mempercepat proses konvergensi.



Gambar 6. Perbandingan solusi numerik populasi pemangsa jenis kedua $Z(t)$

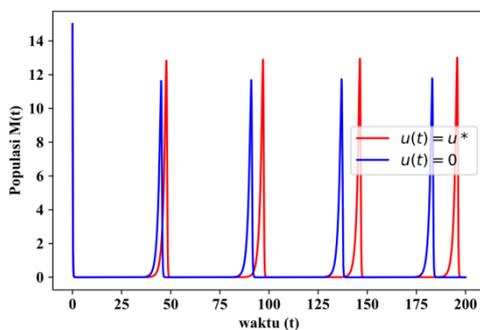
Hasil simulasi untuk parameter yang memenuhi kondisi pada Teorema 3 dan dibandingkan dengan sistem yang tidak dikontrol ditunjukkan pada Gambar 7 sampai dengan Gambar 10.



Gambar 7. Perbandingan solusi numerik populasi pemangsa jenis pertama $X(t)$ dengan kontrol persamaan (22) dan tanpa kontrol

Gambar 7 menunjukkan kondisi jumlah populasi pemangsa jenis pertama yang menuju kepunahan. Namun, jumlah populasi pemangsa yang sehat yang diberi kontrol yang dinyatakan dengan kurva merah lebih lambat punahnya jika dibandingkan dengan kondisi tanpa kontrol.

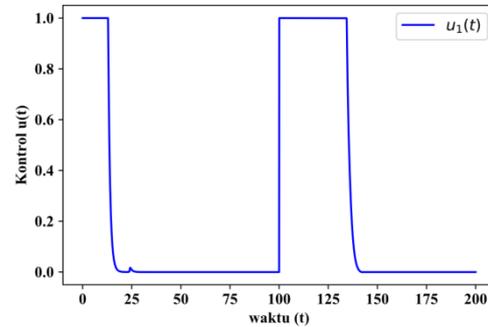
Pemberian kontrol pada populasi pemangsa jenis pertama, yang membuat populasi semakin cepat menuju titik ekuilibrium x_3 berdampak pada naiknya jumlah populasi pemangsa jenis kedua dan juga populasi mangsa, seperti ditunjukkan pada Gambar 8. Hal ini dikarenakan jumlah populasi pemangsa jenis pertama semakin cepat punah dengan pemberian kontrol sehingga pertumbuhan populasi pemangsa jenis kedua tidak terganggu. Alasan yang sama diterapkan pada jumlah populasi mangsa dimana pertumbuhan mangsa hanya dipengaruhi oleh predasi salah satu jenis pemangsa saja.



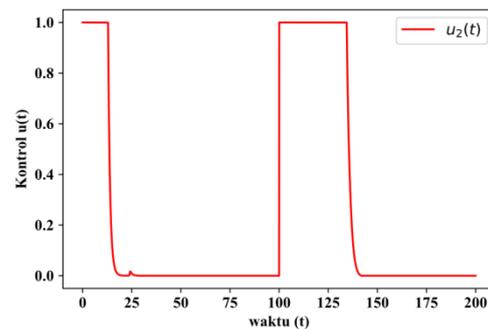
Gambar 8. Perbandingan solusi numerik populasi mangsa $M(t)$ dengan kontrol persamaan (22) dan tanpa kontrol.

Nilai kontrol $u_1(t), u_2(t)$ yang diperoleh dari persamaan (22) ditunjukkan pada Gambar 9 dan 10. Tampak pada Gambar 9 bahwa kontrol akan berulang secara periodik di kisaran $t=100$ yang bertepatan dengan waktu naiknya jumlah populasi pemangsa

jenis kedua dan mangsa, sesuai dengan kondisi periodik pertumbuhan mangsa yang tampak juga pada Gambar 8.



Gambar 9. Kontrol $u_1(t)$ yang menyatakan pemberian vaksinasi pada $t \in [0, 200]$



Gambar 10. Kontrol $u_2(t)$ yang menyatakan pemberian treatment pada $t \in [0, 200]$

Kesimpulan

Pada artikel ini telah dibahas tentang model predator-prey. Model yang dibentuk adalah model modifikasi dengan mempertimbangkan adanya dua jenis populasi pemangsa pada suatu wilayah. Salah satu populasi pemangsa memiliki kemungkinan untuk terjangkit penyakit dan dapat menularkannya sesama jenis populasi. Hasil analisis

kestabilan menunjukkan bahwa terdapat beberapa kasus khusus titik kestabilan yang menarik diamati, diantaranya titik kestabilan bebas populasi, punahnya populasi pemangsa jenis pertama, punahnya populasi pemangsa jenis kedua dan punahnya infeksi sehingga seluruh populasi bertahan hidup. Pada analisis kestabilan, telah ditunjukkan bahwa nilai kontrol berpengaruh pada kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium. Berdasarkan simulasi numerik, dengan menggunakan parameter yang disesuaikan agar memenuhi teorema kestabilan, pemberian vaksinasi dan treatment pada populasi berpengaruh terhadap pertumbuhan populasi pemangsa dan mangsa. Dengan pemberian vaksinasi dan treatment, pertumbuhan pemangsa lebih tinggi dan penyebaran infeksi lebih terkendali.

Daftar Pustaka

Bate, A. M., Hilker, F.M., Predator-prey oscillations can shift when diseases become endemic, *Journal of Theoretical Biology*, 316 (2013) pp. 1–8

Bera, S. P., Maiti, A., Samanta, G.P., A Prey-predator Model with Infection in Both Prey and Predator, *Filomat*, 29:8 (2015), 1753–1767

Das, K.P., A mathematical study of a predator-prey dynamics with disease in predator, *ISRN Applied mathematics*, Vol. 2011 Article ID 807486

Dash, S.B., Saini, H., Panda T.C., Mishra, A., Predator-Prey Model for Infectious Virtual Machines in IaaS Cloud Environment Based on Lotka-Volterra Equation, *Asian Journal of Information Technology*, 14(3):84-91, 2015

Han, L., Ma, Z., Four Predator Prey Models with Infectious Diseases, *Mathematical and Computer Modelling*, 34 (2001) 849-858, Pergamon

Hugo, A., Massawe, E.S., Makinde, O.D., An eco-epidemiological mathematical model with treatment and disease infection in both prey and predator population, *Journal of Ecology and the Natural Environment*, Vol. 4(10), pp. 266-279, July 2012

Kumar, M., Mishra, B.K., Panda, T.C., Predator-Prey Models on Interaction between Computer Worms, Trojan Horse and Antivirus Software Inside a Computer System, *International Journal of Security and Its Applications*, Vol. 10, No. 1 (2016), pp.173-190

Rida, S.Z., Khalil, M., Hosham, H.A., Gadallah, S., predator-prey fractional-order dynamical system with both the populations affected

by diseases, *Journal of Fractional Calculus and Applications*, Vol. 5(3S) No. 13, pp. 1-11

Shukla, J.B., Singh, G., Shukla, P., Tripathi, A., Modeling and analysis of the effects of antivirus software on an infected computer network, *Applied Mathematic and Computation Elsevier*, 227(2014):11-18, 2014

Sooknanan, J., Bhatt, B., Comissiong, D.M.G., A modified predator–

prey model for the interaction of police and gangs, *R. Soc. Open sci.* 3:160083.
<http://dx.doi.org/10.1098/rsos.160083>