

Fuzzy T^2 Hotelling (T_f^2) Control Chart

Ayundyah Kesumawati^a, M. Mashuri^b, Irhamah^c

^a Program Studi Statistika, FMIPA, Universitas Islam Indonesia, Jogjakarta;

^b Program Studi Statistika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya;

^c Program Studi Statistika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

ABSTRACT

Statistical Process Control (SPC) is a method used to monitor a process for identifying special causes of variation and necessary to improve the process. One technique commonly used in the SPC is to determine whether the process is stable or not, both the mean and variability. Multivariate control charts are used if necessary to control together two or more related quality characteristics. Sometimes in a process production there is a lack of precision in the calculation, especially if the data used in the form of either data or qualitative attributes. Fuzzy set theory, specifically discusses the development of concepts and techniques related to the sources of uncertainty or imprecision in nature. Control charts are constructed by transforming crisp numbers into fuzzy numbers can be an alternative to obtain representative results of several variables in which there are several quality characteristics. Transformation of some functions, which are used in this study is Fuzzy Median Transformation (FMT). The advantages of FMT is that it can be used for the data in the form of asymmetry. This paper will discuss about the algorithm for Fuzzy T^2 Hotelling control chart and its application to the production data of PT. IGLAS (Persero). From the results of the application of Fuzzy T^2 Hotelling control chart got that out of the 5 variables that were analyzed, the dominant variables that lead to out of control is variable bottle molding process.

Key Words: Fuzzy Multivariate Control Chart, Fuzzy Median Transformation, Algorithm Fuzzy T^2 Hotelling,

ABSTRAK

Statistical Process Control (SPC) merupakan suatu metode yang digunakan untuk memonitor sebuah proses dalam mengidentifikasi penyebab khusus variasi dan diperlukan untuk memperbaiki proses. Salah satu teknik yang umum digunakan dalam SPC adalah penggunaan diagram kontrol statistika untuk mengetahui apakah proses tersebut stabil atau tidak, baik mean maupun variabilitasnya. Diagram kontrol multivariat digunakan jika diperlukan adanya pengendalian bersama-sama dua atau lebih karakteristik kualitas yang berhubungan. Terkadang dalam suatu proses produksi terdapat kurangnya ketepatan dalam perhitungan apalagi jika data yang digunakan berupa data yang berbentuk atribut atau kualitatif. Teori himpunan *Fuzzy*, khusus membahas tentang pengembangan konsep dan teknik yang berkaitan dengan sumber ketidakpastian atau ketidaktepatan di alam. Diagram kontrol yang dibangun dengan mentransformasi bilangan crisp menjadi bilangan *fuzzy* dapat menjadi salah satu alternatif untuk mendapatkan hasil yang representatif dari beberapa variabel yang didalamnya terdapat beberapa karakteristik kualitas. Dari beberapa fungsi transformasi, yang digunakan dalam penelitian ini adalah *Fuzzy Median Transformation*

(FMT). Kelebihan dari FMT ini adalah dapat digunakan untuk data yang berbentuk asimetri. Dalam makalah ini akan dibahas mengenai algoritma pembuatan diagram kontrol fuzzy T^2 Hotelling dan penerapannya pada data hasil produksi PT. IGLAS (Persero). Dari hasil penerapan pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat didapatkan bahwa dari ke-5 variabel yang dianalisis, variabel yang dominan menyebabkan *out of control* adalah variabel proses cetakan botol.

Kata-Kata Kunci : Diagram Kontrol *Fuzzy* Multivariat, *Fuzzy Median Transformation*, *Algoritma Diagram Kontrol Fuzzy T^2 Hotelling*

Pendahuluan

Dalam pengendalian kualitas suatu produk dibutuhkan alat yang digunakan untuk mengontrol apakah proses produksi tersebut sudah maksimal dalam menghasilkan produk dengan kualitas tinggi dan terhindar dari kerusakan. Dengan adanya kualitas yang maksimal dari produk tersebut diharapkan perusahaan akan terhindar dari pemborosan dan inefisien sehingga dapat mengurangi biaya produksi per unit dan harga produk dapat menjadi lebih bersaing di pasaran.

Statistical Process Control (SPC) merupakan suatu metode yang digunakan untuk memonitor sebuah proses dalam mengidentifikasi penyebab khusus variasi dan diperlukan untuk memperbaiki proses. Salah satu teknik yang umum digunakan adalah penggunaan diagram kontrol statistika untuk mengetahui apakah proses tersebut stabil atau tidak, baik mean maupun variabilitasnya. Diagram kontrol berdasarkan banyaknya karakteristik kualitas yang diukur dibagi menjadi 2 jenis yaitu diagram kontrol univariat dan diagram kontrol multivariat. Diagram kontrol multivariat digunakan jika diperlukan adanya pengendalian bersama-sama dua atau lebih karakteristik kualitas yang berhubungan.

Pada suatu proses produksi seringkali ditemukan adanya ketidakakuratan dalam perhitungan,

apalagi jika variabel yang digunakan adalah variabel yang berbentuk atribut atau kualitatif. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu penilaian / kriteria tengah untuk kriteria kualitas misalkan penampilan, rasa dan warna yang tidak bisa dinilai secara numerik melainkan dengan kriteria linguistik seperti sangat baik, baik, cukup baik, buruk, dan lain sebagainya. Diagram kontrol tradisional disusun berdasarkan data yang memuat angka pasti. Namun ketika data tersebut dipengaruhi oleh penilaian, evaluasi dan keputusan secara subyektif, dalam hal ini adanya campur tangan manusia, maka hasil yang didapatkan akan berupa data yang samar atau tidak pasti. Hasil variabilitas dalam keadaan samar tersebut harus ditangani dengan tepat agar hasil pengolahan data bisa *representative*.

Zadeh (1965) mengemukakan teori himpunan bilangan *fuzzy*, khusus membahas tentang pengembangan konsep dan teknik yang berkaitan dengan sumber ketidakpastian atau ketidaktepatan di alam dan atau berdasarkan subjektivitas persepsi seseorang. Seiring perkembangan jaman, teori himpunan bilangan *fuzzy* telah dikembangkan secara luas dalam berbagai bidang, salah satunya pada bidang pengontrolan kualitas. Teori himpunan bilangan *fuzzy* dalam pengembangannya di bidang pengontrolan kualitas yang banyak dibahas adalah diagram kontrol *fuzzy*, dimana konsep dari pembuatan diagram

kontrol tersebut terletak pada adanya transformasi data dari himpunan bilangan *crisp* menjadi himpunan bilangan *fuzzy*. Beberapa penelitian tentang aplikasi *fuzzy* yang telah banyak dibahas yaitu Raz, T. dan Wang (1990) tentang penggunaan *fuzzy* pada metode pendekatan probabilitas dan fungsi keanggotaan dalam membangun diagram kontrol pada data linguistik. Taleb (2006) mengembangkan suatu prosedur yang berbeda untuk mengkontruksi sebuah diagram kontrol pada data linguistik berdasarkan himpunan *fuzzy* dan teori probabilitas. Dari beberapa penelitian diatas dapat disimpulkan bahwa himpunan bilangan *fuzzy* dapat digunakan untuk mengatasi ketidakpastian atau ketidakakuratan dalam perhitungan pada suatu proses produksi. Zarandi (2006), diagram kontrol *fuzzy* dapat diaplikasikan untuk data yang berbentuk variabel maupun atribut.

PT. IGLAS (Persero) adalah perusahaan yang bergerak di bidang industri pembuatan botol kaca. Dari hasil produksi ada 2 kategori yang didasarkan pada kesempurnaan pembuatan botol yaitu baik dan cacat. Jika hasil produk baik maka akan dipasarkan sedangkan untuk produk cacat akan dilebur dan kembali diproduksi lagi. Pada proses produksi pembuatan botol kaca ada beberapa tahapan yang dilalui. Metode ini digunakan untuk mengetahui dimana tahapan proses yang paling dominan menyebabkan botol tersebut cacat.

Pada penelitian ini akan dibahas tentang konsep diagram kontrol *fuzzy* yang dikembangkan berdasarkan statistik T^2 Hotelling yang diaplikasikan pada data hasil produksi PT. IGLAS (Persero).

Tujuan Penelitian/Tujuan Penulisan

Berdasarkan perumusan masalah di atas maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Mendapatkan algoritma pembuatan diagram kontrol *fuzzy* T^2 Hotelling (T_f^2).
2. Menerapkan pembuatan diagram kontrol *fuzzy* T^2 Hotelling (T_f^2) pada data hasil produksi PT. IGLAS (Persero).

Metode Penelitian/Penulisan

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data hasil produksi botol RC Cola 800 ml PT. Iglas Persero Gresik. Proses pengambilan sampel dilakukan dengan mengambil secara acak sebanyak 576 botol setiap hari selama 48 hari proses produksi yang kemudian diklasifikasikan menjadi 3 sampai 4 level karakteristik kualitas berdasarkan masing-masing variabel yang diamati. Variabel yang digunakan adalah hasil produksi botol, cetakan botol, ring botol, pundak botol dan body botol. Masing-masing variabel yang diamati tersebut diklasifikasikan menjadi beberapa level karakteristik misalnya baik, retak, cacat. Metodologi untuk identifikasi sinyal *out of control* pada diagram kontrol *fuzzy* multivariat adalah sebagai berikut Mengevaluasi konsep identifikasi sinyal *out of control* pada diagram kontrol *fuzzy* multivariat, yaitu transformasi data dengan menggunakan *Median Transformation Method* untuk mendapatkan nilai representatif dari data. mendapatkan nilai estimasi $\hat{\mu}_f$ dan $\hat{\sigma}_f$ berdasarkan nilai representatif dari bilangan *Triangular Fuzzy Number*. Mendapatkan nilai *Upper Limit Control* (UCL) dan *Lower Limit Control* (LCL). Mendapatkan nilai Statistik Uji *fuzzy* T^2 Hotelling (T_f^2). Plot sebuah titik pada diagram kontrol *fuzzy* multivariat pada waktu ke-*i* untuk masing-masing statistik.

Jika ditemukan adanya titik *out of control*, selidiki penyebab untuk masing-masing titik *out of control*. Melakukan

interpretasi sinyal *out of control* dengan menggunakan dekomposisi MYT, yaitu dekomposisi MYT dilakukan setelah pengamatan ke-*i* yang tidak terkontrol dideteksi dengan statistik T_f^2 , sehingga yang pertama kali adalah menentukan bentuk *fuzzy* T_i^2 Hotelling ($T_{f,i}^2$) untuk setiap karakteristik kualitas ke-*i*. Memeriksa bentuk *unconditional fuzzy* T_j^2 Hotelling ($T_{f,j}^2$) untuk setiap karakteristik kualitas ke-*j* dengan persamaan

$$T_j^2 = \frac{(x_j - \bar{x}_j)^2}{s_j^2} \sim \left(\frac{m+1}{m} \right) F_{(1,m-1,\alpha)}$$

dimana $j = 1, \dots, p$. Selanjutnya $T_{f,j}^2$ dibandingkan dengan UCL, apabila $T_{f,j}^2 > UCL$ maka akan signifikan tidak terkontrol. Mengeluarkan variabel yang menyebabkan *out of control*, kemudian memeriksa apakah $d_j = T_f^2 - T_{f,j}^2$ variabel ke-*j* tetap menghasilkan sinyal. Jika $d_j = T_f^2 - T_{f,j}^2$ tetap menghasilkan sinyal, maka tentukan bentuk *conditional* $T_{f,j+1,1,2,\dots,j}^2$ dari variabel ke-*j* yang tidak terkontrol dengan menggunakan persamaan

$$T_{j+1,1,2,\dots,j}^2 = \frac{(x_{j+1} - \bar{x}_{j+1,1,2,\dots,j})^2}{s_{j+1,1,2,\dots,j}^2} \sim$$

$$\left(\frac{(m+1)(m-1)}{m(m-k-1)} \right) F_{(1,m-k-1,\alpha)}$$

Jika nilai $T_{f,j+1,1,2,\dots,j}^2 > UCL$, maka akan signifikan tidak terkontrol. Jika $d_j = T_f^2 - T_{f,j}^2$ dari sisa variabel yang lain tetap menghasilkan sinyal, maka tentukan semua bentuk $T_{f,j+1,1,2,\dots,j}^2$ dan dengan cara yang sama periksa bentuk *conditional*-nya. Ulangi prosedur di atas untuk $d_j = T_f^2 - T_{f,j}^2$ yang lain sampai T_f^2 statistik tidak signifikan.

Pembahasan

Algoritma Diagram Kontrol Fuzzy T^2 Hotelling

Pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat pada dasarnya tidak berbeda dengan pembuatan diagram kontrol multivariat, perbedaan hanya terletak pada transformasi data awal menjadi data berupa bilangan *fuzzy*. Fungsi keanggotaan ($\tilde{\phi}_a$) untuk *fuzzy* multivariat diberikan pada persamaan berikut.

$$\tilde{\phi}_{a_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 & 1 \\ 0,75 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

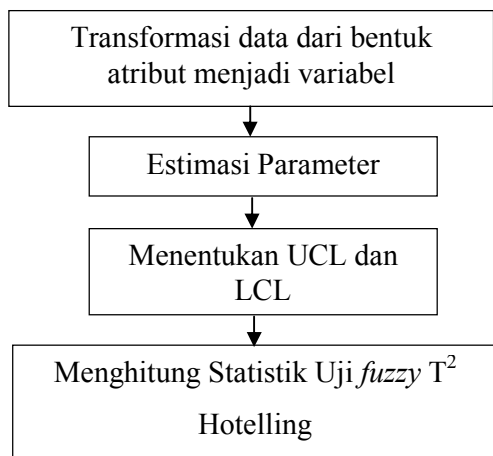
$$\phi_{a_{2,3,4,5}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Berikut ini adalah algoritma pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat:

1. Transformasi data dari bilangan *crisp* ke bilangan *fuzzy*
 - i. Hitung proporsi dari masing-masing karakteristik kualitas variabel.
 - ii. Transformasi data menggunakan *Fuzzy Median Transformation Method* (FMT) dengan bilangan *Triangular Fuzzy Number* (TFN) untuk mendapatkan nilai representatif dari data. Misalkan $\tilde{a}_{fit} = [a_{1ki}, a_{2ki}, a_{3ki}]$ adalah bentuk dari *Triangular Fuzzy Number* dengan $i = 1, \dots, j$ dan $t = 1, \dots, 48$ dengan j adalah banyaknya karakteristik kualitas setiap variabel, k adalah banyaknya variabel, t adalah banyaknya sampel. Dari TFN tersebut digunakan FMT
2. Mendapatkan nilai estimasi \tilde{i} dan \tilde{O} berdasarkan nilai representatif.

3. Mendapatkan nilai *Upper Control Limit* (UCL) dan *Lower Control Limit* (LCL).
4. Mendapatkan nilai Statistik Uji *fuzzy* T^2 Hotelling (T_f^2).
5. Plot sebuah titik pada diagram kontrol *fuzzy* multivariat pada waktu ke-*i* untuk masing-masing statistik.
6. Jika ditemukan adanya titik *out of control*, selidiki penyebab untuk masing-masing titik *out of control*.

Berdasarkan algoritma diatas didapatkan diagram alir untuk konsep pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat adalah sebagai berikut:



Proses selanjutnya dapat dilakukan sampai dengan semua pengamatan dalam keadaan *in control*.

Penerapan Diagram Kontrol Fuzzy T^2 Hotelling

Pada penelitian ini, data pengamatan yang digunakan akan ditransformasi ke dalam himpunan bilangan *fuzzy* dengan menggunakan *fuzzy median transformation* dengan contoh perhitungan sebagai berikut:

Misal diambil sampel 2, Hitung proporsi untuk masing-masing karakteristik kualitas dari variabel.

Berdasarkan nilai proporsi pada tabel 1. dikalikan matrik fungsi keanggotaan dengan perhitungan sebagai berikut :

$$TFN = [0,887 \quad 0,0174 \quad 0,0955 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,75 & 1 \\ 0,75 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0,023872 \quad 0,075955 \quad 0,330295]$$

Dengan menggunakan median transformation didapatkan

$$- \text{Untuk } 0,075955 < \frac{0,330295 + 0,023872}{2} = 0,177$$

$$\text{Maka } R = 0,323351$$

$$\sqrt{\frac{(0,330295 - 0,023872)(0,330295 - 0,075955)}{2}} = 0,132892$$

$$- \text{Untuk } 0,075955 > \frac{0,330295 + 0,023872}{2}$$

$$\text{Maka } R = 0,012857 +$$

$$\sqrt{\frac{(0,330295 - 0,023872)(0,075955 - 0,023872)}{2}} = 0,113201$$

Tabel 1. Proporsi Karakteristik Kualitas Variabel Hasil Produksi

sampel	Hasil Produksi (a ₁)			
	sempurna (a ₁₁)	baik (a ₁₂)	kurang baik (a ₁₃)	caca t (a ₁₄)
2	511	10	55	0
proporsi	$\frac{511}{576} = 0,887$	$\frac{10}{576} = 0,0174$	$\frac{55}{576} = 0,0955$	$\frac{0}{576} = 0$

Dari Perhitungan diatas didapatkan nilai sampel representatif untuk pengamatan ke-2 adalah 0,132892. Dari nilai representatif didapatkan statistik deskriptif untuk 30 pengamatan pada masing-masing variabel disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Statistik Deskriptif Nilai Representatif

Variabel	Mean	St. dev	Min	Median	Max
Nilai representatif hasil produksi	0.178	0.040	0.103	0.174	0.284
Nilai representatif cetakan botol	0.083	0.010	0.073	0.079	0.113
Nilai representatif ring botol	0.084	0.047	0.011	0.077	0.186
Nilai representatif pundak botol	0.078	0.006	0.073	0.076	0.092
Nilai representatif <i>body</i> botol	0.097	0.014	0.079	0.095	0.138

Pada penelitian ini, penerapan diagram kontrol *fuzzy* multivariat sama dengan diagram kontrol T^2 Hotelling yaitu melalui 2 fase dimana fase pertama akan dilakukan estimasi parameter untuk mendapatkan batas kontrol yang digunakan untuk mengetahui apakah proses produksi telah *in control* atau *out of control*. Apabila proses dinyatakan dalam keadaan *out of control*, maka variabel yang menyebabkan proses *out of control* akan ditelusuri lebih lanjut dan pengamatan yang menyebabkan kondisi *out of control* akan dihilangkan. Proses tersebut terus berlangsung sampai proses dinyatakan *in control* untuk semua pengamatan. Pada fase kedua akan dilakukan proses *monitoring* untuk mengetahui apakah proses produksi selanjutnya tetap *in control* atau *out of control*.

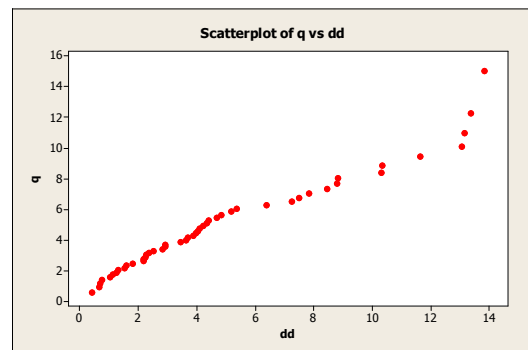
Pada proses pertama akan dilakukan uji normal multivariat pada data secara keseluruhan dengan asumsi data berdistribusi normal multivariat diberikan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Data karakteristik kualitas berdistribusi normal multivariat

H_1 : Data karakteristik kualitas tidak berdistribusi normal multivariat

Pengujian terhadap 48 sampel data hasil produksi botol RC Cola 800 ml

menunjukkan bahwa proporsi nilai d_i^2 sebesar 60,61%, karena nilai $d_i^2 > 50\%$ maka terima H_0 yang berarti bahwa data nilai representatif dari masing-masing variabel berdistribusi normal multivariat, sedangkan plot data ditunjukkan pada Gambar 1. yang cenderung membentuk garis lurus. Selain itu, dilakukan juga uji multivariat skewness dan kurtois dengan nilai *p-value* untuk multivariat skewness 0,000000 dan multivariat kurtois sebesar 0,0038 yang berarti bahwa data nilai *representative* untuk masing-masing variabel berdistribusi normal multivariat. Sehingga asumsi untuk pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat T^2 Hotelling terpenuhi dan proses selanjutnya dapat dilanjutkan.



Gambar 1. Plot Data Normal Multivariat fase I

Pengujian asumsi antar variabel-variabel nilai representatif saling berkorelasi dilakukan dengan menggunakan uji *Bartlett Sphericity* untuk mengetahui besarnya nilai korelasi antar variabel dengan menggunakan program statistik. Hipotesis pengujian korelasi

variabel-variabel nilai representatif dari masing-masing variabel dari hasil proses produksi adalah sebagai berikut :

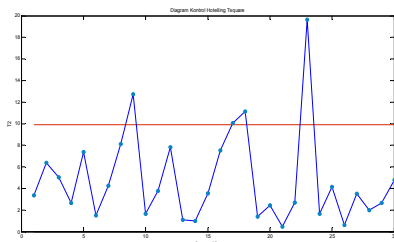
$$H_0 : \tilde{n} = \mathbf{I}$$

$$H_1 : \tilde{n} \neq \mathbf{I}$$

Dari hasil pengujian tersebut didapatkan nilai *p-value* sebesar 0,000 maka keputusan yang diambil adalah tolak H_0 , sehingga matriks korelasi tidak sama dengan matriks identitas, sehingga dapat dikatakan bahwa terdapat korelasi antar variabel dependen.

Diagram Kontrol Fuzzy Multivariat Fase I

Pada fase 1 data yang digunakan adalah data hasil produksi botol RC Cola 800 ml yang diambil mulai tanggal 19 Maret 2012 – 19 April 2012 dengan jumlah pengamatan selama 30 hari dan ukuran sampel 576 botol/hari. Pengujian terhadap 30 hari pengamatan data hasil produksi botol RC Cola 800 ml menunjukkan bahwa proporsi nilai d_i^2 sebesar 65,38%, karena nilai $d_i^2 > 50\%$ maka terima H_0 yang berarti bahwa data karakteristik kualitas hasil produksi untuk 30 hari pengamatan berdistribusi normal multivariat. Sehingga asumsi untuk pembuatan diagram kontrol fuzzy multivariat T^2 Hotelling terpenuhi dan proses selanjutnya dapat dilanjutkan. Dari hasil analisis didapatkan plot untuk diagram kontrol fuzzy multivariat pada gambar 2.



Gambar 2. Plot Diagram Kontrol Fuzzy T^2 Hotelling Fase I

Dari gambar 2. dapat disimpulkan bahwa proses produksi dalam keadaan *out*

of control hal ini ditandai dengan terdapatnya 4 titik yang signifikan *out of control* dengan $UCL = 9,9002$ dan $LCL = 0$ untuk fase 1 yaitu pengamatan ke 9, 17, 18 dan 23 dengan nilai T_f^2 masing-masing pengamatan dapat dilihat pada tabel 3.

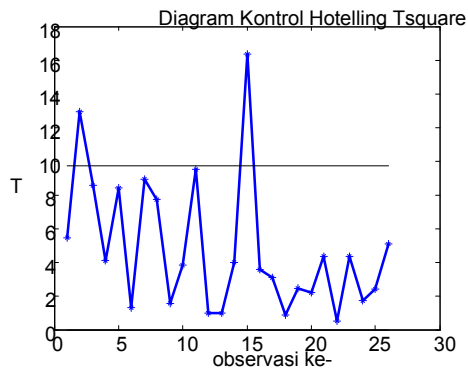
Tabel 3. Nilai T_f^2 pengamatan *out of control* proses 1

No	T_f^2	No	T_f^2
1	3.3678	16	7.5333
2	6.3702	17	10.0614*
3	5.0385	18	11.1186*
4	2.6718	19	1.4059
5	7.3681	20	2.4181
6	1.494	21	0.4823
7	4.2704	22	2.7044
8	8.1099	23	19.6549*
9	12.7159*	24	1.6537
10	1.6626	25	4.1628
11	3.7576	26	0.6257
12	7.8127	27	3.5071
13	1.0854	28	1.9831
14	0.9893	29	2.647
15	3.5607	30	4.7669

*) Signifikan *out of control* pada $\alpha=0.05$

Untuk proses selanjutnya pembuatan diagram kontrol dilakukan dengan menghilangkan pengamatan yang *out of control*. Setelah dilakukan eliminasi terhadap pengamatan yang *out of control* yaitu pengamatan ke-9, 17, 18 dan 23 ,proses berlanjut pada proses 2. Uji Normal Multivariat pada 26 data menunjukkan bahwa proporsi nilai d_i^2 sebesar 54,17%, karena nilai $d_i^2 > 50\%$ maka terima H_0 yang berarti bahwa data karakteristik kualitas hasil produksi untuk 26 hari pengamatan berdistribusi normal multivariat. Sehingga asumsi untuk pembuatan diagram kontrol fuzzy multivariat T^2 Hotelling terpenuhi dan proses selanjutnya dapat dilanjutkan. Dari hasil analisis didapatkan plot untuk

diagram kontrol *fuzzy* multivariat pada gambar 3.



Gambar 3. Plot Diagram Kontrol *Fuzzy* T^2 Hotelling Proses 2

Dari Plot diatas didapatkan bahwa proses produksi tetap berada dalam keadaan *out of control* dengan masih adanya 2 titik *out of control* yaitu pengamatan ke-2 dan pengamatan ke-16 dengan nilai $UCL = 9,714$ dan $LCL = 0$. Untuk nilai T_f^2 masing-masing dapat dilihat pada tabel 4.

Tabel 4. Nilai T_f^2 pengamatan *out of control* proses 2

Pengamatan ke-	T_f^2	Pengamatan ke-	T_f^2
1	5.446	14	3.9998
2	12.935 2*	15	16.357 6*
3	8.5392	16	3.5322
4	4.1021	17	3.0972
5	8.3713	18	0.8892
6	1.267	19	2.4518
7	8.9049	20	2.1866
8	7.6868	21	4.3231
9	1.5435	22	0.4822
10	3.8387	23	4.3521
11	9.4919	24	1.7291
12	0.9677	25	2.4141
13	0.9985	26	5.0921

*) Signifikan *out of control* pada $\alpha=0.05$

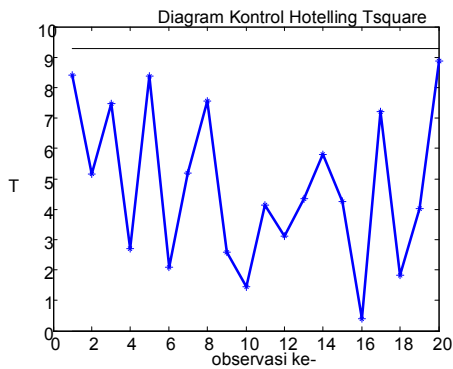
Proses eliminasi pengamatan yang *out of control* pada analisis ini dilakukan

Tabel 5. Rangkuman Proses Eliminasi Pengamatan *Out of Control*

sampai tidak ada pengamatan yang *out of control*. Pada penelitian ini, proses eliminasi berlangsung selama 6 iterasi dengan rangkuman proses pada tabel 5.

Proses ke-	Uji Normal Multivariat	Pengamatan <i>out of control</i>	UCL	Diagram Kontrol <i>Fuzzy Hotelling</i>
3	nilai proporsi $d_i^2 = 63,63\%$ data berdistribusi normal multivariat	6 dan 14	9.590 4	
4	nilai proporsi $d_i^2 = 57,14\%$ data berdistribusi normal multivariat	1	9.447 1	
5	nilai proporsi $d_i^2 = 55\%$ data berdistribusi normal multivariat	11	9.364 5	

Pada proses ke-6, pengamatan yang tersisa sebanyak 20 pengamatan dan hasil plot diagram kontrol untuk proses ke-6 diperoleh hasil sebagai berikut :



Gambar 4. Plot Diagram Kontrol *Fuzzy T²* Hotelling Proses 6

$$\bar{X} = \begin{matrix} \bar{x}_1 & 0.1797 \\ \bar{x}_2 & 0.0765 \\ \bar{x}_3 & 0.1050 \\ \bar{x}_4 & 0.0773 \\ \bar{x}_5 & 0.0967 \end{matrix}$$

$$S = \begin{matrix} 0.0013722 & 0.0000095 & 0.0015873 & 0.0000136 & 0.0001323 \\ 0.0000095 & 0.0000080 & 0.0000228 & 0.0000076 & 0.0000145 \\ 0.0015873 & 0.0000228 & 0.0020706 & 0.0000824 & 0.0000245 \\ 0.0000136 & 0.0000076 & 0.0000824 & 0.0000376 & 0.0000346 \\ 0.0001323 & 0.0000145 & 0.0000245 & 0.0000346 & 0.0000930 \end{matrix}$$

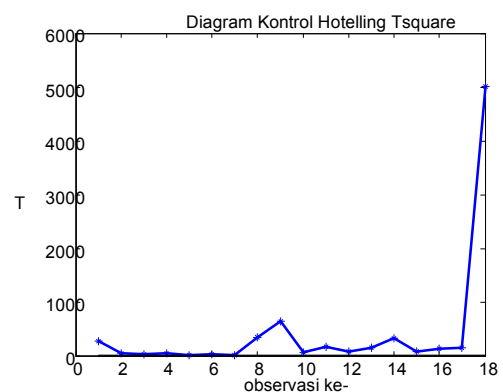
$$S^{-1} = \begin{matrix} 1.3906 & 2.2296 & 1.0876 & 0.2891 & 1.2378 \\ 2.2296 & 3.7592 & 1.7456 & 0.4538 & 1.9590 \\ 1.0876 & 1.7456 & 0.8511 & 0.2281 & 0.9669 \\ 0.2891 & 0.4538 & 0.2281 & 0.1084 & 0.2403 \\ 1.2378 & 1.9590 & 0.9669 & 0.2403 & 1.1232 \end{matrix} \times 10^3$$

Pengujian terhadap 18 hari pengamatan data hasil produksi botol RC Cola 800 ml menunjukkan bahwa proporsi nilai d_i^2 sebesar 55,55%, karena nilai $d_i^2 > 50\%$ maka terima H_0 yang berarti bahwa data karakteristik kualitas hasil produksi untuk 18 hari pengamatan berdistribusi normal multivariat. Sehingga asumsi untuk pembuatan diagram kontrol *fuzzy* multivariat T^2 Hotelling pada fase 2 terpenuhi dan proses selanjutnya dapat dilanjutkan. Dari hasil analisis didapatkan plot untuk diagram kontrol *fuzzy* multivariat adalah sebagai berikut:

Pada proses ke-6 ini didapatkan $UCL = 9,273$ dan $LCL = 0$ dan proses telah didapatkan dalam keadaan *in control*, sehingga UCL pada proses ke-6 akan digunakan sebagai UCL pada fase 2.

Diagram Kontrol *Fuzzy* Multivariat Fase 2

Data yang digunakan pada fase 2 yaitu dengan menggunakan 18 pengamatan dengan ukuran sampel 576 yang diambil pada tanggal 20 April – 8 Mei 2012. Parameter yang digunakan pada fase 2 didapatkan dari estimasi parameter pada fase 1 adalah sebagai berikut :



Gambar 5. Plot Diagram Kontrol *Fuzzy T²* Hotelling Fase 2

Dari hasil plot untuk diagram kontrol pada fase 2 didapatkan bahwa

sebanyak 18 pengamatan tetap signifikan *out of control* dengan $UCL = 9.273$ yang didapatkan dari UCL pada fase 1 dan $LCL = 0$ sehingga proses produksi dinyatakan *out of control*. Oleh karena itu, perlu dilakukan identifikasi lebih lanjut tentang variabel yang dominan menyebabkan sinyal *out of control* dengan menggunakan metode dekomposisi MYT yang dikombinasikan dengan variabel yang telah diubah menjadi bilangan *fuzzy*.

Kesimpulan

Proses pembuatan diagram kontrol *fuzzy* T^2 Hotelling dilalui dengan tahapan yang sama dengan pembentukan diagram kontrol T^2 Hotelling, perbedaan hanya terletak pada proses transformasi data yang digunakan untuk mengubah variabel berbentuk atribut menjadi bentuk variabel yang kemudian diolah dengan menggunakan estimasi parameter untuk bilangan *fuzzy*.

Variabel yang dominan menyebabkan adanya sinyal *out of control* adalah variabel proses cetakan botol. Dikarenakan pada proses pembentukan T^2 yang *conditional* masih ditemukan adanya *subvector* yang *out of control* maka perlu dilakukan proses untuk mendapatkan kemungkinan adanya variabel-variabel lain yang menyebabkan proses *out of control*

selain dalam variabel yang digunakan dalam perhitungan.

Pustaka

- Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets. *Information and Control*, **8**, 338-359.
- Raz, T., & Wang, J., 1990, Probabilistic and Membership Approaches In The Construction of Control Chart For Linguistic Data. *Journal of Production Planning and Control*, **1**, 147-157.
- Taleb, H., Liman, M., & Hirota, K., 2006. Multivariate Fuzzy Multinomial Control Chart. *Journal of Quality Technology and Quantitative Management*, **3(4)**, 437-453.
- Zarandi, M. H., Fazel., & Turksen, I.B., Kashan, A. H., 2006. Fuzzy Control Charts For Variable And Attribute Quality Characteristics. *Journal of Fuzzy Systems*, **3(1)**, 31-44.
- Mason, R.L., Young, J.C., & Tracy, N.D., 1999, Improving the Sensitivity of The T^2 Statistic in Multivariate Process Control. *Journal of Quality Technology*, **31(2)**, 155-165.