

VISUALISASI 3D (TIGA DIMENSI) SEBAGAI *COGNITIVE TOOL* DALAM PEMBELAJARAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Yugowati Praharsi

Fakultas Teknologi Informasi, Universitas Kristen Satya Wacana, Salatiga

E-mail: yougo_281@yahoo.com

Abstract

Banyak mahasiswa yang belum bisa memahami dengan baik mengenai visualisasi sebuah persamaan dalam 3 peubah. Apalagi jika ada beberapa persamaan dimana masing-masing persamaan mempunyai 3 peubah, maka akan lebih rumit lagi dalam membuat visualisasinya dalam satu bidang koordinat. Mahasiswa lebih memfokuskan pada masalah terpecahkan/terselesaikan (*solving problem*) daripada menyelesaikan masalah (*problem solving*). Memfokuskan pada visualisasi, ada 6 hal dimana visualisasi dapat digunakan untuk meningkatkan kognisi manusia (Hewett, 2005). Visualisasi dapat: (1) meningkatkan memori eksternal dan pemrosesan sumber-sumber daya yang tersedia bagi pengguna, (2) mengurangi kebutuhan pengguna untuk mencari informasi, (3) meningkatkan kemampuan pengguna untuk mendeteksi pola dalam data, (4) memfasilitasi penggambaran beberapa inferensi melalui persepsi langsung dari informasi daripada melalui proses kognitif yang kompleks, (5) memfasilitasi monitoring dari perubahan bilangan-bilangan besar dari kejadian-kejadian yang potensial, dan (6) mengubah informasi menjadi sebuah bentuk yang dapat diproses oleh komputer (*encode*).

Kebutuhan untuk memahami hubungan yang abstrak, dimana dalam satu hal dituntut untuk berusaha menangkap/capture sesuatu hal yang penting, dan dalam lain hal visualisasi/alat diperlukan untuk bekerja dengan informasi secara visual, seharusnya mampu dikolaborasikan dalam mengidentifikasi kondisi dan dalam mengembangkan sebuah representasi pengetahuan yang tepat dengan cara berpikir tentang informasi yang sedang divisualisasikan. Dalam paper ini dikaji dan dikembangkan *cognitive tool* dengan memanfaatkan fungsi-fungsi dalam program MatLab. Fungsi-fungsi yang dapat digunakan untuk membuat gambar antara lain *meshgrid (x,y)* dan *plot3*; sedangkan untuk merotasi gambar antara lain *view(az,el)* dan *rotate3d on/rotate3d off*, yang kesemuanya itu disusun dengan pemrograman script. Fungsi ini membantu untuk memperjelas apakah antar bidang berpotongan disatu titik, satu garis, berpotongan secara tidak teratur, atau bahkan tidak berpotongan. Pola kedudukan antar bidang tersebut menentukan penyelesaian jenis-jenis sistem persamaan linier, yaitu sistem bujur sangkar, *over-determined system*, dan *under-determined system* (Liendfield et all, 2000). Selain itu juga diberikan penyelesaian numeriknya, dengan menghitung error dari penyelesaian yang ada. Hasil uji coba di Fakultas Teknologi Informasi—UKSW pada mahasiswa yang mengambil matakuliah aljabar linier trimester II/2004-2005, bahwa dengan visualisasi dan menginterpretasikan hasil dari visualisasi, pemahaman dan pengetahuan pembelajar akan penyelesaian masalah sistem persamaan linier, apakah ada satu penyelesaian, banyak penyelesaian atau tidak ada penyelesaian pada masing-masing jenis sistem persamaan linier dapat meningkat/bertambah.

Kata kunci: visualisasi 3D, *cognitive tool*, sistem persamaan linier, pemrograman script, penyelesaian numerik.

1. Pendahuluan

Banyak mahasiswa yang belum bisa memahami dengan baik mengenai visualisasi sebuah persamaan dalam 3 peubah. Apalagi jika ada beberapa persamaan dimana masing-masing persamaan mempunyai 3 peubah, maka akan lebih rumit lagi dalam membuat visualisasinya. Mahasiswa lebih memfokuskan pada masalah terpecahkan/terselesaikan (*solving problem*) daripada menyelesaikan masalah (*problem solving*). Memfokuskan pada visualisasi, ada 6 hal dimana visualisasi dapat digunakan untuk meningkatkan kognisi manusia (Hewett, 2005). Visualisasi dapat: (1) meningkatkan memori eksternal dan pemrosesan sumber-sumber daya yang tersedia bagi pengguna, (2) mengurangi kebutuhan pengguna untuk mencari informasi, (3) meningkatkan kemampuan pengguna untuk mendeteksi pola

dalam data, (4) memfasilitasi penggambaran beberapa inferensi melalui persepsi langsung dari informasi daripada melalui proses kognitif yang kompleks, (5) memfasilitasi monitoring dari perubahan bilangan-bilangan besar dari kejadian-kejadian yang potensial, dan (6) mengubah informasi menjadi sebuah bentuk yang dapat diproses oleh komputer (*encode*).

Kebutuhan untuk memahami hubungan yang abstrak, dimana dalam satu hal dituntut untuk berusaha menangkap/capture sesuatu hal yang penting, dan dalam lain hal visualisasi/alat diperlukan untuk bekerja dengan informasi secara visual, seharusnya mampu dikolaborasikan dalam mengidentifikasi kondisi dan dalam mengembangkan sebuah representasi pengetahuan yang tepat dengan cara berpikir tentang informasi yang sedang divisualisasikan. Dalam paper ini dikaji dan dikembangkan *cognitive tool* sederhana

dengan memanfaatkan fungsi-fungsi dalam program MatLab yang diharapkan nantinya mampu meningkatkan pemahaman pembelajaran dalam proses belajar-mengajar sistem persamaan linier.

2. Landasan Teori

2.1 Jenis Sistem Persamaan Linier (SPL)

Sistem persamaan linier adalah sebuah sistem yang terdiri lebih dari 1 persamaan linier. Disebut persamaan linier jika setiap suku terdiri dari satu peubah dan masing-masing peubah pangkat satu. Contohnya: $3x + 2y - 3 = 0$.

Jenis sistem persamaan linier ada dua (Praharsi, 2004), yaitu sistem persamaan linier non homogen dimana konstanta matriks b tak semuanya bernilai 0, dan sistem persamaan linier homogen dimana konstanta matriks b semuanya bernilai nol.

$${}_m A_n X_1 = {}_m b_1 \begin{cases} b \neq 0 \rightarrow \text{SPL Non Homogen} \\ b = 0 \rightarrow \text{SPL Homogen} \end{cases}$$

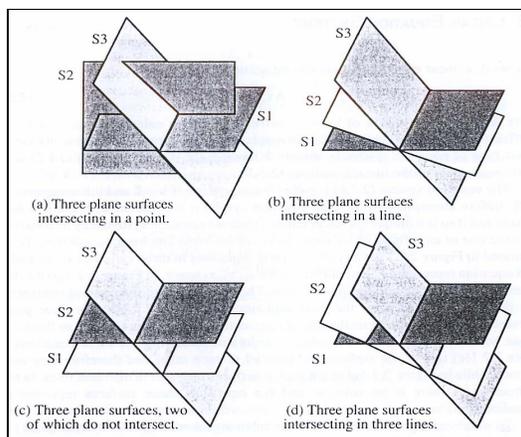
Sedangkan jika ditinjau dari penyelesaiannya, sistem persamaan linier dapat mempunyai penyelesaian (ada) dan tidak ada penyelesaian. Ada penyelesaiannya pun bisa penyelesaiannya tunggal atau bahkan banyak penyelesaian.

Sebuah sistem persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian dikatakan tak konsisten (*inconsistent*). Jika ada setidaknya-tidaknya satu penyelesaian, maka sistem persamaan tersebut dinamakan konsisten (*consistent*).

Jenis sistem persamaan linier ada 3 yaitu: sistem bujur sangkar, *over-determined system*, dan *under-determined system* (Liendfield et al, 2000).

2.2 Sistem Bujursangkar (Liendfield et al, 2000)

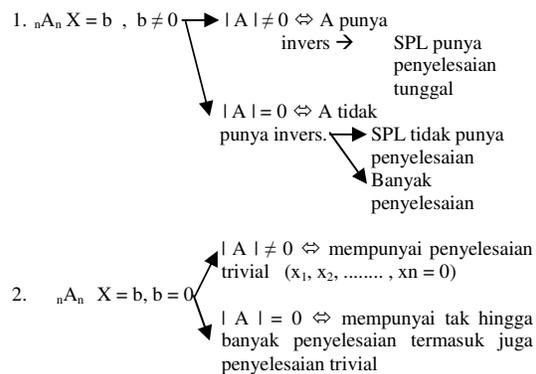
Dalam kasus ini, jumlah persamaan sama dengan jumlah peubah.



Gambar 1. Bidang-bidang yang Merepresentasikan Sistem Bujur Sangkar

Gambar diatas menunjukkan 3 bidang dalam ruang 3D, merepresentasikan 3 persamaan dalam 3 peubah. Gambar (a) menunjukkan 3 bidang berpotongan disatu titik yang berarti hanya ada satu penyelesaian. Gambar (b) menunjukkan 3 bidang berpotongan pada satu garis yang berarti mempunyai banyak penyelesaian, karena garis merupakan kumpulan titik-titik. Gambar (c) menunjukkan 3 bidang yang dua diantaranya tidak saling berpotongan. Gambar (d) menunjukkan 3 bidang yang berpotongan pada 3 garis (s1,s2), (s1, s3), dan (s2,s3).

Beberapa kasus dalam penyelesaian sistem bujur sangkar sbb (Praharsi, 2004):

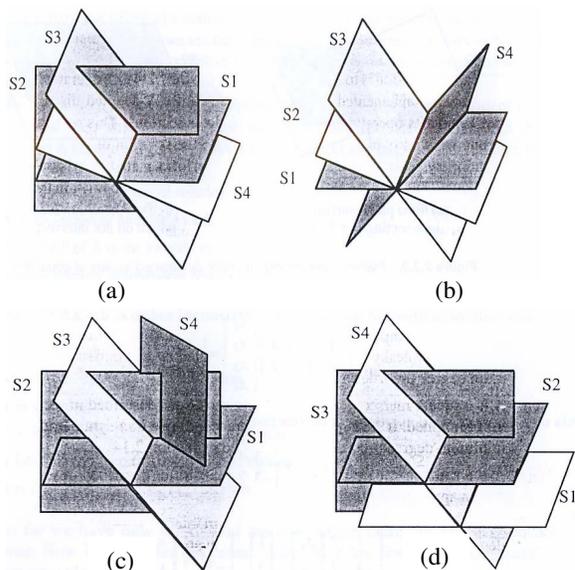


Sehingga dapat ditarik sifat dari SPL Homogen, yaitu selalu mempunyai penyelesaian.

Dengan MatLab, penyelesaian dapat dicari dengan terlebih dahulu megetikkan matriks koefisien (A), matriks konstanta (b), kemudian ketikkan fungsi $X=A \setminus b$ atau $X=inv(a)*b$ untuk mencari matriks peubahnya (X). Akan tetapi, menghitung X dengan mencari invers matriks A bukanlah cara yang efisien karena melibatkan perkalian (n+1)! dimana n merupakan jumlah persamaan.

2.3 Over-determined systems (Liendfield et al, 2000)

Dalam kasus ini, jumlah persamaan lebih besar dari jumlah peubah.



Gambar 2. Bidang-bidang yang Merepresentasikan Over-determined System

Gambar diatas menunjukkan 4 permukaan bidang dalam ruang 3D, merepresentasikan 4 persamaan dalam 3 peubah. Gambar (a) menunjukkan 4 bidang secara keseluruhan yang berpotongan di satu titik sehingga sistem persamaan konsisten dengan satu penyelesaian. Gambar (b) menunjukkan seluruh bidang berpotongan di satu garis dan ini merepresentasikan sebuah sistem konsisten dengan banyak penyelesaian. Gambar (c) menunjukkan bidang-bidang tidak berpotongan pada satu titik, sehingga sistem persamaan tidak konsisten. Akan tetapi dalam contoh ini titik-titik perpotongan dari kelompok-kelompok tiga bidang, yaitu: (S1, S2, S3), (S1, S2, S4), (S1, S3, S4), dan (S2, S3, S4). Titik-titik perpotongan dari kelompok-kelompok tiga bidang tsb yang fisibel yaitu: (S1, S2, S3) dan (S1, S2, S4). Gambar (d) menunjukkan 4 bidang dengan penyelesaian yang tidak konsisten yaitu tanpa penyelesaian.

Sistem over-determined dari persamaan linier simultan sering terjadi dalam banyak pencocokan kurva (Curve Fitting) dari data percobaan, sehingga membawa pada penyelesaian *a relatively small degree of inconsistency* diantara persamaan-persamaan. Kita harus memilih titik terbaik dari semua area yang didefinisikan oleh perpotongan. Satu kriteria untuk melakukannya adalah penyelesaian yang dipilih seharusnya dapat meminimalkan jumlah kuadrat galat/error dari persamaan. Sebagai contoh:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 1.98 &= r_1 \\ 2.05x_1 - x_2 - 0.95 &= r_2 \\ 3.06x_1 + x_2 - 3.98 &= r_3 \\ -1.02x_1 + 2x_2 - 0.92 &= r_4 \\ 4.08x_1 - x_2 - 2.90 &= r_5 \end{aligned}$$

Dalam kasus ini jumlah kuadrat galatnya:

$$S = \sum_{i=1}^5 r_i^2$$

Untuk meminimalkan S dengan cara:

$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0, k = 1, 2.$$

Diperoleh:

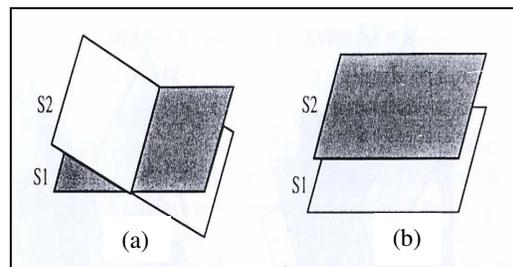
$$\frac{\partial S}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^5 2r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_k}, k = 1, 2.$$

$$\text{Jadi } \sum_{i=1}^5 r_i \frac{\partial r_i}{\partial x_k} = 0, k=1, 2.$$

Untuk meminimalkan jumlah kuadrat dari persamaan galat digunakan metode pseudo-invers. Dalam MatLab dengan fungsi pinv.

2.4 Under-determined systems (Liendfield et all, 2000)

Dalam kasus ini, jumlah persamaan lebih sedikit dari jumlah peubah.



Gambar 3. Bidang yang Merepresentasikan Under-determined System

Gambar diatas menunjukkan 2 bidang dalam ruang 3D, merepresentasikan 2 persamaan dalam 3 peubah. Gambar (a) menunjukkan bahwa 2 bidang berpotongan pada satu garis sehingga persamaan konsisten dengan banyak penyelesaian. Gambar (b) menunjukkan 2 bidang tidak berpotongan sehingga persamaan inkonsisten/tidak konsisten.

Teorema under-determined system:

SPL Homogen dengan lebih banyak bilangan tak diketahui (peubah) daripada banyaknya persamaan selalu mempunyai tak terhingga banyaknya penyelesaian.

atau

${}_m A_n X_1 = {}_m b_1$ dimana $n > m$, mempunyai banyak tak hingga penyelesaian.

Dalam kasus ini, jumlah persamaan lebih kecil dari jumlah peubah.

3. Metode

Perintah plot dari dunia 2D disempurnakan oleh perintah *plot3* untuk bekerja dalam dunia 3D. Format yang digunakan sama dengan perintah plot untuk 2 dimensi, kecuali data yang digunakan adalah tiga satuan, bukan sepasang. Format umum dari *plot3* adalah *plot3(x,y, z1,'tipe bidang 1', x,y, z2, 'tipe bidang 2', x, y, z3, 'tipe bidang 3',...)*. Sedangkan tipe bidang yaitu karakter string opsional yang mengatur warna dan simbol penanda (Hanselman et al, 1997).

Garis	Simbol	Point	Simbol	Warna	Karakter
Solid	-	Titik	.	yellow	y
Dashed	_	Plus	+	red	r
Dotted	:	Bintang	*	green	g
Dashdot	-.	Lingkaran	o	blue	b
		Tanda x	x	black	k

Beberapa fungsi yang digunakan, yaitu:

- $[X, Y]=\text{meshgrid}(x, y)$: menciptakan suatu matriks X dengan baris-barisnya adalah duplikat dari vektor x, dan suatu matriks Y dengan dengan kolom-kolomnya adalah duplikat dari vektor y.
- *view(az,el)*: dengan az adalah azimuth dan el adalah elevasi dari sudut pandang yang diperlukan. Azimuth diinterpretasikan sebagai rotasi sudut pandang terhadap sumbu z dan elevasi diinterpretasikan sebagai rotasi sudut pandang terhadap bidang x-y. Azimuth bernilai negatif memberikan rotasi berlawanan dengan arah jarum jam dan azimuth bernilai positif memberikan rotasi searah jarum jam. Elevasi bernilai negatif memberikan pandangan/sudut pandang dari bawah objek dan elevasi bernilai positif memberikan pandangan/sudut pandang dari atas objek.
- *rotate3d on* atau *rotate3d off*: cara lain untuk melihat grafik 3D dimana azimuth dan elevasi dapat diset secara interaktif menggunakan mouse.

4. Hasil dan Pembahasan

Dibawah ini contoh penyelesaian dari grafik 3D dengan 3 persamaan dan 3 peubah (sistem bujur sangkar), dengan sistem persamaan liniernya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25000 \\ 0,06x + 0,07y + 0,08z &= 1620 \\ 0x + y - z &= 6000 \end{aligned}$$

```
>> A=[1 1 1; 0.06 0.07 0.08; 0 1 -1]
```

```
A =
    1.0000    1.0000    1.0000
    0.0600    0.0700    0.0800
         0    1.0000   -1.0000
```

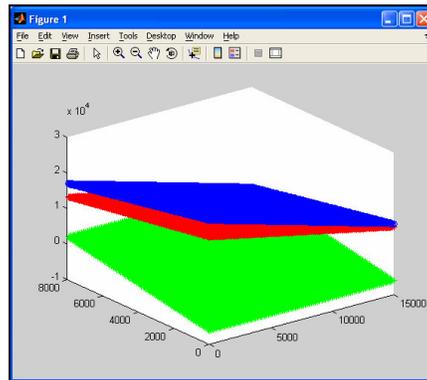
```
>> b=[25000; 1620; 6000];
```

```
>> X=A\b
```

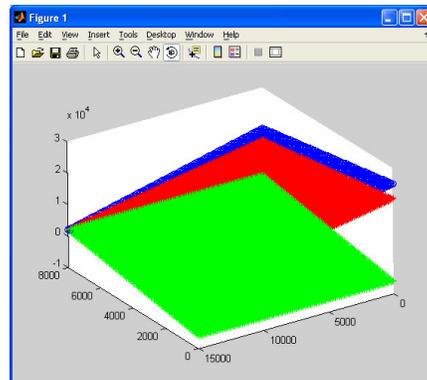
```
X =
1.0e+004 *
    1.5000
    0.8000
    0.2000
```

Script untuk menampilkan gambar:

```
[x,y]=meshgrid(0:100:15000, 0:100:8000);
z1=25000-x-y;
z2=(1620-0.06.*x-0.07.*y)./0.08;
z3=y-6000;
view(-37.5,30);
plot3(x,y,z1,'bo',x,y,z2,'r*',x,y,z3,'g+');
```



Gambar 4. Bidang-bidang yang merepresentasikan sistem bujur sangkar dengan view (-37.5, 30)



Gambar 5. Bidang-bidang yang merepresentasikan sistem bujur sangkar dengan rotasi (-129, -39)

Dari gambar diatas terlihat bahwa 3 bidang berpotongan disatu titik. Itu berarti bahwa sistem persamaan linier diatas mempunyai penyelesaian yang tunggal, yaitu dengan nilai-nilai $x=15000$, $y=8000$, dan $z=2000$.

Dibawah ini contoh grafik 3D dengan 2 persamaan dan 3 peubah (under-determined system), dengan sistem persamaan liniernya sebagai berikut:

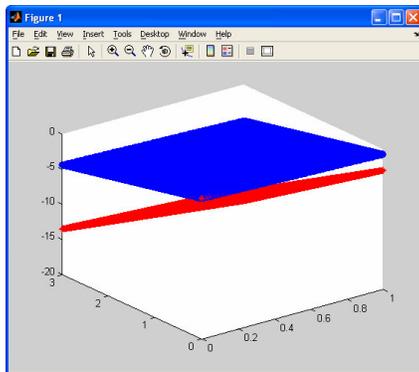
```
80x + 160y + 110z = 540
6x + 9y + 2z = 25

>> A=[80 160 110; 6 9 2];
>> b=[540; 25];
>> x1=A\b
x1 =
     0
 2.4925
 1.2836
>> x2=pinv(A)*b
x2 =
 0.8309
 1.8724
 1.5812
>> norm(x1)
ans =
 2.8036
>> norm(x2)
ans =
 2.5878
```

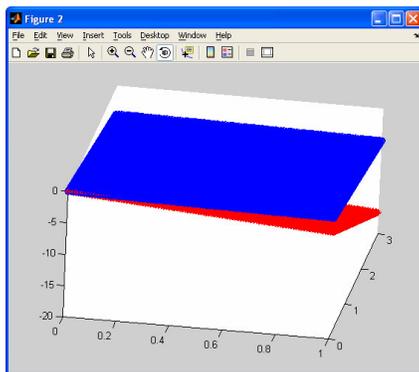
Penjelasan: penyelesaian pertama, x1, adalah penyelesaian yang memenuhi sistem; penyelesaian kedua, x2, adalah penyelesaian yang memenuhi sistem dan memberikan penyelesaian jumlah kuadrat galat/error (norm) yang minimum.

Script untuk menampilkan gambar:

```
[x,y]=meshgrid(0:0.01:1,0:0.01:3);
z1=(-80*x-160*y)/110;
z2=(-6*x-9*y)/2;
figure(1);
plot3(x,y,z1,'bo',x,y,z2,'r*');
```



Gambar 6. Bidang-bidang yang merepresentasikan over-determined system dengan view (322.5, 30)



Gambar 7. Bidang-bidang yang merepresentasikan over-determined system dengan rotasi (4, -24)

Pada gambar (6) diatas, untuk mengetahui letak azimuth dan elevasi dengan mengetikkan pada command window:

```
>> [az,el]=view
az =
 322.5000
el =
 30
```

Dengan merotasi gambar (6) menjadi (4, -24), gambar (7), dapat dilihat bahwa 2 bidang berpotongan pada satu garis. Karena garis merupakan kumpulan dari titik-titik, maka harus dipilih titik/penyelesaian yang terbaik. Kriteria yang digunakan yaitu meminimalkan jumlah kuadrat galat/error dari persamaan. Sehingga penyelesaiannya adalah $x = 0.8309$, $y = 1.8724$ dan $z = 1.5812$.

Dibawah ini contoh grafik 3D dengan 4 persamaan dan 3 peubah (over-determined system), dengan sistem persamaan liniernya sebagai berikut:

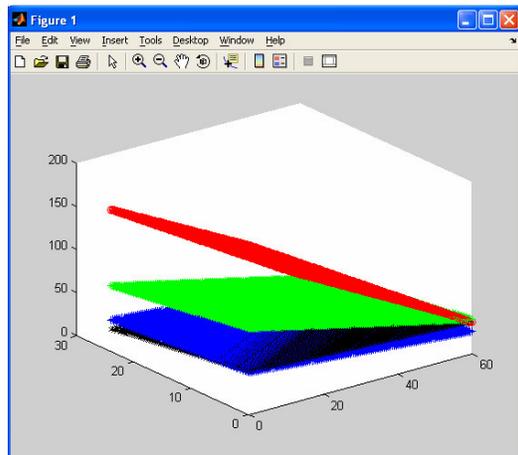
$$\begin{aligned} 0.3x + 0.4y + 0.8z &= 39 \\ 0.8x + 0.4y + 0.3z &= 59 \\ x + y + z &= 100 \\ 0.2x + y + z &= 50 \end{aligned}$$

```
>> A=[0.3 0.4 0.8; 0.8 0.4 0.3; 1 1 1; 0.2 1 1];
>> b=[39; 59; 100; 50];
>> x1=A\b
x1 =
 58.7071
 23.7071
 15.5409
>> norm(x1)
ans =
 65.1926
>> x2=pinv(A)*b
x2 =
 58.7071
 23.7071
 15.5409
>> norm(x2)
ans =
 65.1926
```

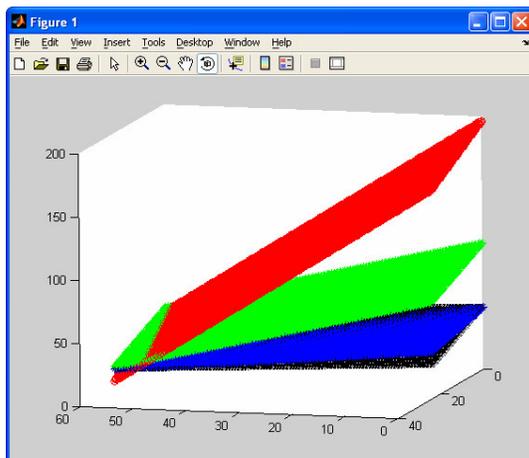
Pada saat menyelesaikan over-determined system, penentuan pseudo-inverse dari matriks sistem hanya bagian dari proses dan secara normal tidak diperlukan. Operator MatLab \ menyelesaikan over-determined sistem secara otomatis. Sehingga dapat dilihat bahwa jumlah kuadrat error/galatnya (norm) sama.

Script untuk menampilkan gambar:

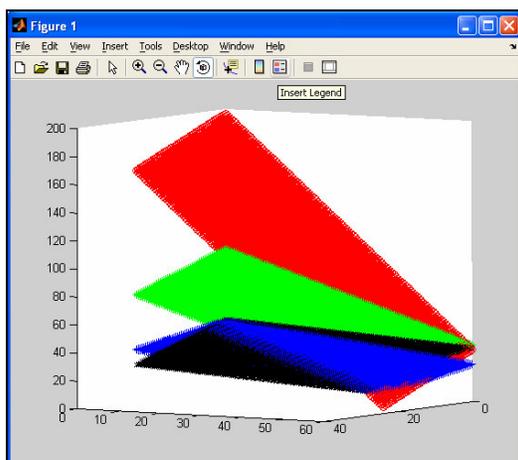
```
[x,y]=meshgrid(0:0.5:60, 0:0.5:24);
z1=(39-0.3*x-0.4*y)/0.8;
z2=(59-0.8*x-0.4*y)/0.3;
z3=100-x-y;
z4=50-0.2*x-y;
rotate3d on;
plot3(x,y,z1,'b+',x,y,z2,'ro',x,y,z3,'g*',x,y,z4,'kx');
rotate3d off;
```



Gambar 8. Bidang-bidang yang merepresentasikan over-determined system dengan view(322.5, 30)



Gambar 9. Bidang-bidang yang merepresentasikan over-determined system dengan rotasi (144, 69)



Gambar 10. Bidang-bidang yang merepresentasikan over-determined system dengan rotasi (-44, 5)

Dengan merotasi gambar (8) menjadi (144, 69), gambar (9), dapat dilihat bahwa 4 bidang berpotongan pada satu titik. Sehingga penyelesaiannya adalah $x = 58.7071$, $y = 23.7071$ dan $z = 15.5409$. Untuk melihat sisi belakang dari gambar (9), dapat dilihat pada gambar (10) dimana seluruh bidang tidak ada yang berpotongan disatu titik.

5. Penutup

Visualisasi 3D dengan MatLab untuk sistem persamaan linier dapat digunakan sebagai cognitive tool yang baik bagi pembelajar. Fungsi-fungsi yang dapat digunakan untuk membuat gambar yaitu plot3, untuk merotasi gambar antara lain view(az,el) dan rotate3d on/rotate3d off. Fungsi ini membantu untuk memperjelas apakah antar bidang berpotongan disatu titik, satu garis, berpotongan secara tidak teratur, atau bahkan tidak berpotongan. Hasil uji coba di Fakultas Teknologi Informasi—UKSW pada mahasiswa yang mengambil matakuliah aljabar linier trimester II 2004-2005, bahwa dengan menginterpretasikan hasil dari visualisasi, pemahaman dan pengetahuan pembelajar akan penyelesaian masalah sistem persamaan linier, apakah ada satu penyelesaian, banyak penyelesaian atau tidak ada penyelesaian pada masing-masing jenis sistem persamaan linier dapat meningkat/bertambah.

Daftar Pustaka

- [1] Hanselman D., and Littlefield, B. 1997. *MatLab Bahasa Komputasi Teknis: Komputasi, Visualisasi, Pemrograman*. Yogyakarta: Penerbit Andi.
- [2] Hewett, T.T. 2005. *Human-Computer Interaction and Cognitive Psychology in Visualization Education*. www.
- [3] Liendfield, G., and Penny, J. 2000. *Numerical Methods Using MatLab*. New Jersey: Prentice Hall.
- [4] Praharsi, Y. 2004. *Diktat Kuliah Aljabar Linier*. Salatiga: Fakultas Teknologi Informasi-Universitas Kristen Satya Wacana.