

## **Visualisasi Aljabar Matriks sebagai Alat Bantu Pembelajaran**

**Ami Fauzifah, Ira Fitriani Widianingrum**

*Jurusan Teknik Informatika, Universitas Islam Indonesia, Yogyakarta*

*e-mail: ami@fti.uii.ac.id*

### **Abstract**

*Visualization is one of the use of technology for learning process. This application used for matrix algebra which more complex calculated operation, to make the learning process more attractive and hence will motivate student to study more actively.*

**Keywords:** *visualization, learning, matrix algebra*

### **1. Pendahuluan**

Metode pembelajaran yang berlaku di Indonesia pada umumnya masih bersifat manual yaitu dengan perantara orang lain yang disebut guru atau dengan perantara tulisan dan/atau gambar di dalam buku sehingga proses pembelajarannya terkadang sangat membosankan dan tidak efisien. Demikian juga pada proses pembelajaran matriks. Selama ini proses pembelajaran matriks dilakukan secara berkelompok dengan cara mengikuti pelajaran di sekolah, diskusi antar teman, dan/atau secara individu dengan cara belajar melalui buku. Pada kenyataannya proses pembelajaran matriks merupakan proses yang penuh dengan operasi penghitungan angka-angka, yang biasanya membosankan dan pada akhirnya menurunkan minat belajar. Untuk itu perlu adanya suatu metode pembelajaran baru yang efektif dan efisien untuk lebih merangsang minat belajar.

Komputer merupakan salah satu alternatif baru yang dapat diaplikasikan dalam metode pembelajaran. Dengan kenyataan ini, maka dalam penelitian ini dibuat program aplikasi untuk pembelajaran matriks yang disertai dengan visualisasi agar proses pembelajaran matriks menjadi menarik dan tidak membosankan. Operasi penghitungan matriks terbatas pada operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pencarian nilai determinan dengan metode Sarrus, metode Ekspansi, dan metode Dekomposisi.

### **2. Landasan Teori**

#### **2.1 Teori Pembelajaran**

Pembelajaran merupakan dasar dari pola perilaku manusia. Apa yang dibawa oleh seseorang sewaktu memulai suatu kegiatan yang berupa pengetahuan, ketrampilan, dan sikap merupakan akibat dari proses pembelajaran. Batasan dari pembelajaran yang diterima secara luas yaitu bahwa pembelajaran adalah suatu perubahan yang permanent sebagai hasil pelatihan atau pengalaman untuk meningkatkan kemampuan dalam mencari jawaban dari suatu persoalan. [4] Kemudian Crisnall (1995) mengemukakan bahwa pembelajaran didefinisikan sebagai perubahan permanen dalam berperilaku yang terjadi sebagai hasil praktek. [1]

## 2.2 Komputer sebagai Alat Bantu Pembelajaran

Pemanfaatan teknologi dalam proses pembelajaran mempunyai karakteristik yang relevan bagi peningkatan mutu pendidikan karena [1]:

- Dimungkinkan penyebaran informasi secara luas, merata, cepat, sehingga dengan demikian pesan dapat disampaikan sesuai dengan isi yang dimaksud,
- Dapat menyajikan materi secara logis, ilmiah, dan sistematis serta mampu melengkapi dan memperluas konsep-konsep materi pelajaran,
- Dapat menjadi partner tenaga pengajar dalam rangka mewujudkan proses belajar mengajar yang efektif, efisien, produktif sesuai dengan kebutuhan serta dapat menyajikan materi menjadi lebih menarik sehingga dapat memacu minat belajar anak didik.

Komputer sebagai alat bantu pembelajaran (*Computer Assisted Instructions*) kini semakin menunjukkan peningkatan yang cukup signifikan. Beberapa istilah yang banyak digunakan adalah CAL (*Computer Aided Learning*), CBE (*Computer Based Educations*), dan CMI (*Computer Managed Instructions*). Istilah-istilah tersebut digunakan pada aplikasi-aplikasi untuk sistem pembelajaran dan sistem yang menunjang sistem pembelajaran seperti mengolah data, mencatat kehadiran dan sebagainya.

Aplikasi bidang pembelajaran dengan komputer sebagai alat bantu diantaranya adalah:

- Drill and Practice* (latih dan praktek), dengan CAI menggantikan pengajar untuk memberikan latihan kepada siswa,
- Tutorial (penjelasan), dengan sistem computer digunakan untuk menyampaikan ajaran,
- Simulasi dan *game* yang dapat menambah pengetahuan.

## 2.3 Matriks dan Operasi Matriks

Matriks didefinisikan sebagai himpunan obyek (bilangan riil atau kompleks, variabel-variabel atau operator dan sebagainya) yang disusun secara persegi panjang (yang terdiri atas baris dan kolom) yang dibatasi dengan tanda kurung siku atau kurung lengkung. Banyaknya baris dan kolom menentukan ukuran (orde) sebuah matriks.[2]

Matriks merupakan suatu susunan bilangan-bilangan (riil atau kompleks) dalam empat persegi panjang, yang berbentuk:

$$A = A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (1)$$

Bilangan  $mn$  dikatakan sebagai unsur matriks  $A$  atau elemen matriks  $A$ . Garis horizontal disebut sebagai baris atau vektor baris, dan garis vertikal disebut sebagai kolom atau vektor kolom dari matriks  $A$ . Matriks dengan  $m$  baris dan  $n$  kolom, secara singkat disebut sebagai matriks  $m \times n$ . [3]

Operasi terhadap suatu matriks merupakan operasi terhadap elemen-elemennya. Umumnya elemen-elemen itu terdiri dari bilangan sejati, maupun kompleks yang tunduk terhadap aturan aljabar skalar.

Operasi penjumlahan dan pengurangan hanya dapat dilakukan pada matriks yang berorde sama. Apabila  $[A]$  dan  $[B]$  matriks yang berorde sama maka  $[A]+[B]=[C]$  berorde sama pula dan elemen-elemennya

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \dots\dots (2)$$

$[A]-[B]=[D]$  juga berorde sama dan elemen-elemennya

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \dots\dots (3)$$

Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan di depan atau di belakang matriks, setara dengan mengalikan tiap elemen matriks itu dengan skalar.

$$[C] = k [A] = [A] k \text{ dan } c_{ij} = k a_{ij} \dots\dots (4)$$

Sifat perkalian matriks dengan matriks:

- a. Perkalian matriks dengan matriks pada umumnya tidak komutatif
- b. Apabila matriks dikalikan dengan matriks menurut urutan tertentu, maka harus dipenuhi beberapa syarat tertentu. Apabila cacah kolom [A] = cacah baris [B] maka [A] dapat dikalikan dengan urutan:  $[C] = [A] [B]$

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj} \dots\dots (5)$$

Matriks [A] dan [B] disebut *comformable*

Apabila matriks [A] berorde (m,q) dan [B] berorde (q,n) maka [C] akan berorde (m,n).

## 2.4 Determinan Matriks

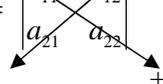
Determinan adalah susunan elemen-elemen yang termuat atas baris dan kolom, dengan banyak baris dan kolom adalah sama. Determinan mempunyai nilai, sedangkan matriks tidak. Suatu determinan mempunyai susunan elemen yang diberi batas garis tegak  $\left| \right|$  sebagai berikut:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

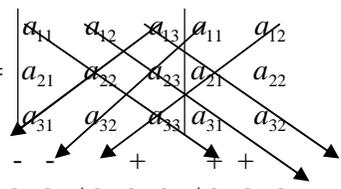
Besaran-besaran  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$  atau lebih lazim  $a_{ij}$  disebut elemen-elemen determinan dan disebut determinan orde ke-n.

### NILAI DETERMINAN

1. Nilai / harga suatu determinan dapat diperoleh dengan berbagai cara antara lain :
  - a. langsung dengan aturan Sarrus
  - b. Metode Ekspansi – menggunakan konsep minor dan kofaktor.
2. Cara langsung (untuk mencari nilai determinan orde 2 dan 3)
  - a. Bila terdapat suatu determinan orde 2

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$


- b. Bila terdapat determinan orde 3

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$


## MINOR DAN KOFAKTOR

Suatu minor adalah bagian dari suatu determinan yang mempunyai sifat-sifat seperti determinan. Minor ini terjadi karena adanya pencoretan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ .  $M_{11}$  berarti minor yang diperoleh karena pencoretan baris 1 dan kolom 1.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

maka minor elemen  $a_{32}$  adalah

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Kofaktor adalah suatu determinan bagian yang diperoleh karena pencoretan salah satu baris dan kolom yang diikuti tanda positif / negatif.

Tanda positif/negatif ini didapat dari bentuk  $(-1)^{i+j}$  dengan  $i$  adalah baris yang dicoret dan  $j$  adalah kolom yang dicoret

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad \dots\dots (6)$$

## METODE EKSPANSI DETERMINAN

Metode ekspansi, menggunakan konsep minor dan kofaktor serta elemen yang tercoret dua kali. Ekspansi menurut baris ke- $i$  adalah

$$D = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

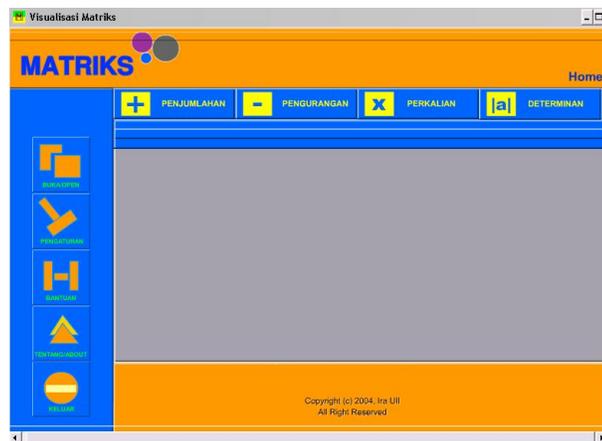
Ekspansi menurut kolom ke- $j$  adalah

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

## 3. Implementasi Sistem Pembelajaran Matriks

Implementasi program menggunakan Borland Delphi 5 dan Macromedia Flash 5. Untuk pembuatan visual dan animasi menggunakan Flash, sedangkan operasi aljabar matriks dibuat dalam Delphi 5.

Form utama terdiri atas tiga bagian, bagian pertama terdapat tombol-tombol yang berfungsi untuk membuka *file*, pengaturan kecepatan, bantuan program, tentang program, dan keluar dari program. Bagian kedua terdapat tombol-tombol untuk operasi matriks yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian matriks dan pencarian determinan. Bagian ketiga berisi pengaturan masing-masing operasi matriks, misalnya jumlah kolom, jumlah baris, atau jumlah matriks.

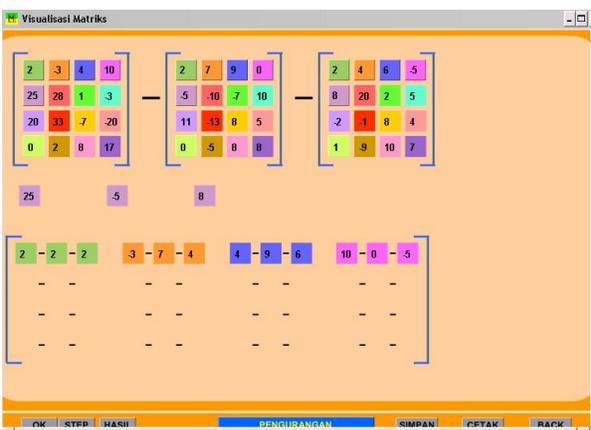


Gambar 1. Form utama

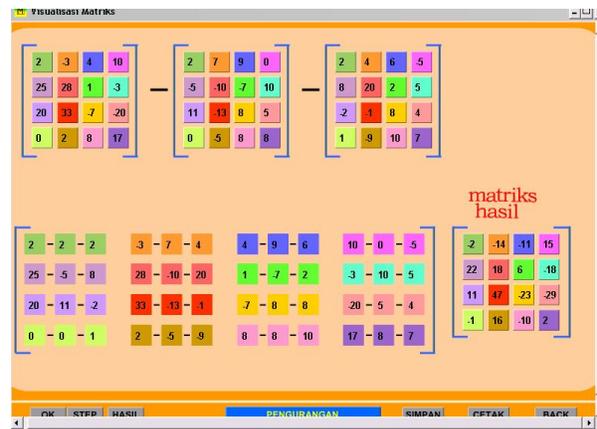
Operasi dan visualisasi matriks ditunjukkan pada *form* berikutnya jika pilihan menu operasi sudah dipilih. Contoh pada operasi pengurangan matriks. Proses visualisasi operasi pengurangan matriks dimulai dengan mengisikan jumlah baris, kolom, dan matriks. Setelah diklik tombol ok, akan membuka *form* proses visualisasi seperti terlihat pada Gambar 2. Sebelum proses dimulai, diisikan dulu nilai-nilai elemen dalam matriks. Setiap elemen matriks pada posisi baris dan kolom yang sama, mempunyai warna dasar yang sama. Kecepatan pergerakan proses dapat diatur pada menu pengaturan. Setelah seluruh elemen matriks diproses, maka matriks hasil operasi pengurangan akan ditampilkan dengan mengklik tombol hasil, seperti ditunjukkan dalam Gambar 3. Proses yang sama juga dilakukan untuk pencarian nilai determinan, perbedaannya hanya pada pemilihan metode pencarian. Ada tiga pilihan metode yaitu Sarrus, Dekomposisi, dan Ekspansi.

#### 4. Analisis Kinerja Sistem

Pada tahap pengujian dan analisis ini, dilakukan dengan membandingkan hasil perhitungan pada program dan teori-teori yang ada serta uji coba pada lingkungan proses pembelajaran matriks. Pengujian normal dilakukan dengan memberikan masukan yang sesuai dengan teori aljabar matriks. Hasil pengujian ini menunjukkan bahwa program sudah sesuai dengan teori. Untuk pengujian tidak normal dilakukan dengan memberikan masukan yang menurut spesifikasi awal dan pengetahuan apriori yang ada tidak diijinkan. Hasil pengujian menunjukkan program sudah memberikan informasi tentang kesalahan yang dilakukan karena masukan yang tidak sesuai dengan teori. Program visualisasi berisi kotak-kotak berwarna-warni sebagai identifikasi elemen matriks yang dapat bergerak sesuai operasi yang diinginkan, sehingga memudahkan pemahaman tentang operasi matriks yang ada langkah per langkah. Kecepatan bergerak dari visualisasi elemen-elemen matriks dapat diatur sesuai keinginan dengan nilai *default* kecepatan adalah 15.



Gambar 2. Visualisasi proses pengurangan matriks



Gambar 3. Hasil akhir visualisasi

Teori-teori aljabar matriks dapat juga dilihat dalam menu bantuan. Pada menu bantuan ini diberikan informasi tentang program yang meliputi spesifikasi sistem, antarmuka, langkah kerja, dan penyelesaian masalah.

Keterbatasan program ada pada keterbatasan layar monitor untuk menampilkan matriks dengan orde lebih dari 5, karena operasi yang melibatkan seluruh elemen dan langkah-langkahnya. Keterbatasan yang lain pada penanganan operasi yang bervariasi seperti  $A+B \cdot C \cdot D$  karena program hanya dapat menangani operasi yang homogen.

## **5. Kesimpulan**

Kesimpulan yang dapat ditarik adalah bahwa komputer sebagai alat bantu pembelajaran dapat diwujudkan dalam bentuk program visualisasi. Apalagi untuk materi yang berupa operasi penghitungann angka-angka seperti aljabar matriks. Program visualisasi aljabar matriks ini dapat menjadi partner tenaga pengajar dalam rangka mewujudkan proses belajar mengajar yang efektif, efisien, produktif sesuai dengan kebutuhan serta dapat menyajikan materi menjadi lebih menarik sehingga dapat memacu minat belajar anak didik.

## **Daftar Pustaka**

- [1] Danim Sudarwan, (1995) *Media Komunikasi Pendidikan*, Bumi Aksara Jakarta.
- [2] Kartono, (2002) *Aljabar Linier, Vektor dan Eksplorasinya dengan Maple*, Graha Ilmu, Yogyakarta.
- [3] Kreyszig Erwin, (1990) *Matematika Teknik Lanjutan*, Erlangga, Jakarta.
- [4] Munandar, A.S, (2001) *Psikologi Industri dan Organisasi*, Universitas Indonesia Jakarta.