Seminar Nasional
Aplikasi Teknologi Informasi 2004
Yogyakarta, 19 Juni 2004

Aplikasi Metode Thomas untuk Mengefisiensikan Penyelesaian Sistem Persamaan Linier pada Persoalan Perambatan Panas dengan Skema Implisit

Supriyono[1], Eka Haraiba[2]
[1]*Sekolah Tinggi Teknologi Nuklir, BATAN*
Jl. Babarsari Po.Box 1008, Yogyakarta
[2]*Jurusan Teknik Informatika, Universitas Islam Indonesia*
Jl. Kaliurang Km. 14 Yogyakarta

Abstract

Equation spread thermal was an issued which on the equation of differentially partial parabolic. For finished that equation, one method used for were different method to which implicit scheme. Degradation of implicit scheme in equation spread thermal produced linier equation system form with matrix was tridiagonal matrix. Linier equation system numerically processed was Gauss-Jordan method. If Step Measurement (Δt and Δx) on equation spread thermal was very small, whereas observing interval and time was bigger. It will made big measure of linier equation system. Finally, completion execution time with Gauss-Jordan method was longer. To reduce completion execution time linier equation system with those Gauss-Jordan methods, it necessary to putted another method, which is Thomas method. The efficient step was to decrease linier equation system measure with Thomas method and a new linier equation system finished with Gauss-Jordan method. Results of the research showed that execution time between combined method of Thomas method and Gauss-Jordan method in accordance Gauss-Jordan had significantly different. The bigger different linier equation system the bigger time they operated. For example, to system matrix 2525 x 2525 the different 03: 05: 760 compared to 33: 55: 490. In this research we also discussed algorithm complexity and study results showed that 2525 x 2525 mix of Thomas method and Gauss-Jordan method is 2.031.105.803 loop and with Gauss-Jordan loop 16.164.813.274.

Kata kunci: *persamaan, perambatan, panas, implisit, matriks, tridiagonal, metode Thomas, efisien.*

1. Pendahuluan

Kebanyakan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsiil (PDP) [1]. Ada 3 tipe bentuk PDP, yaitu bentuk ellips, parabola dan hiperbola. Salah satu persoalan PDP yang mengandung waktu sebagai variabel bebas biasanya termasuk dalam PDP bertipe parabola. Salah satu contoh bentuk PDP adalah persamaan perambatan panas atau persamaan difusi polutan.

Dalam penelitian ini yang dijadikan topik penelitian adalah penyelesaian perambatan panas. Untuk menyelesaikan persoalan perambatan panas tersebut, digunakan metode beda hingga (Finite Difference Method). Ada banyak skema yang digunakan dalam metode beda hingga tersebut. Dalam penelitian ini, skema yang digunakan adalah skema implisit. Persamaan umum yang terbentuk dari penyelesaian perambatan panas yang menggunakan metode beda hingga dengan skema implisit bentuknya adalah suatu sistem persamaan linier dengan bentuk matriksnya adalah matriks tridiagonal.

Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier tersebut, salah satunya adalah metode Gauss-Jordan. Jika jumlah titik pada jaringan titik hitungan dalam bidang *x-t* banyak sekali, maka matriks yang terbentuk dari sistem persamaan linier tersebut ukurannya menjadi besar. Untuk sistem persamaan linier dengan matriks berukuran besar dan jika diselesaikan dengan metode Gauss-Jordan akan mengakibatkan waktu eksekusi dan ukuran memori menjadi besar. Untuk mengurangi waktu eksekusi tersebut ada suatu teknik penyelesaian, yaitu dengan menambahkan metode Thomas dalam penyelesai yang menggunakan metode Gauss-Jordan.

Fungsi metode Thomas adalah membuat ukuran matriks tridiagonal sistem persamaan linier menjadi berkurang. Hasil penelitian menunjukkan bahwa Waktu eksekusi antara gabungan metode Thomas dan metode Gauss-Jordan dengan metode Gauss-Jordan saja untuk sistem dengan ukuran matriks disekitar 2000 an perbandingan waktunya adalah 1 berbanding 12. Dalam penelitian ini dibahas juga kompleksitas algoritma dan hasil penelitian menunjukkan bahwa untuk ukuran matriks 2000 an banyaknya kalang (loop) antara gabungan metode Thomas dan metode Gauss-Jordan dengan metode Gauss-Jordan saja adalah 2 : 8.

2. Landasan Teori

Persamaan perambatan panas yang berbentuk PDP bertipe parabola adalah [1]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \text{...... (1)}$$

dimana:

T : temperatur.
k : Koefisien konduktifitas panas.
t : waktu.
x : jarak

Persamaan (1) berlaku untuk daerah $0 < x < L$ dimana L adalah jarak maksimum dan $0 < t < \tau$ dimana τ waktu maksimum penelitian serta dengan syarat awal dan syarat batasnya adalah:

$$T(x,0) = f(x);\ 0 \le x \le L$$
$$T(0,t) = g_0(t);\ 0 \le t \le \tau$$
$$T(L,t) = g_1(t);\ 0 \le t \le \tau$$

Untuk menyelesaiakan persamaan (1) di atas digunakan metode beda hingga dengan skema implisit sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \qquad \text{...... (2a)}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \qquad \text{...... (2b)}$$

Persamaan (2a) dan (2b) disubstitisukan ke dalam persamaan (1) dihasilkan

$$-\frac{k}{\Delta x^2}T_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2k}{\Delta x^2}\right)T_i^{n+1} - \frac{k}{\Delta x^2}T_{I+1}^{n+1} = \frac{T_i^n}{\Delta t} \qquad \text{...... (3)}$$

Jika konstanta-konstanta $A = -\frac{k}{\Delta x^2}$, $B = \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2k}{\Delta x^2}\right)$ dan $C = \frac{T_i^n}{\Delta t}$, maka persamaan (3) di atas dapat dibentuk menjadi persamaan matriks dengan bentuk matriksnya adalah matriks tridiagonal sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix} B & A & 0 & \cdots & 0 \\ A & B & A & \cdots & 0 \\ 0 & A & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (4)
$$

Matriks tridiagonal pada pers (4) disederhanakan dengan metode Thomas [2] menjadi :

$$
\begin{bmatrix} S & R & 0 & \cdots & 0 \\ R & S & R & \cdots & 0 \\ 0 & R & S & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_4 \\ T_6 \\ \vdots \\ T_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2^* \\ C_4^* \\ C_6^* \\ \vdots \\ C_{m-1}^* \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (5)
$$

Dimana nilai R dapat dicari dengan rumus $R = A*A$, sedangkan $S = (2*R) - (B*B)$. Untuk mendapatkan nilai C pada pers (5) berasal dari rumus berikut:

$$C_2^* = \left(A(C_1 + C_3)\right) + \left(B * C_2\right)$$
$$C_4^* = \left(A(C_3 + C_5)\right) + \left(B * C_4\right)$$
$$C_6^* = \left(A(C_5 + C_7)\right) + \left(B * C_6\right)$$

dan seterusnya.

Untuk mendapatkan nilai T_2, T_4, T_6, dst dari persamaan (5) digunakan metode Gauss-Jordan. Nilai T_2, T_4, T_6, dst disubstitusikan ke dalam metode Thomas lagi untuk menghasilkan T_1, T_3, T_5, T_7 dst dengan rumus:

$$T_1 = \frac{C_1 - (A * T_2)}{B} \qquad \ldots\ldots (6)$$
$$T_3 = \frac{C_3 - (A * T_4) - (A * T_2)}{B}$$
$$T_5 = \frac{C_5 - (A * T_6) - (A * T_4)}{B}$$
$$T_7 = \frac{C_7 - (A * T_6)}{B}$$

Dari kedua proses penyelesaian di atas, dapat disusun algoritma komputer. Dari algoritma tersebut dapat dihitung jumlah kalang dengan menggunakan teknik kompleksitas

3. Metode Penelitian

Sesuai dengan kebutuhan dalam penelitian ini langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

3.1 Menurunkan persamaan model

Persamaan awal sebagai bentuk model perambatan panas diselesaikan dengan metode beda hingga dengan skema implisit. Hasil penyelesaian yang berbentuk sistem persamaan linier dengan bentuk matriks tridiagonal diselesaikan lagi dengan metode Thomas yang dikombinasikan dengan metode Gauss-Jordan dan diselesaikan pula dengan hanya menggunakan metode Gauss-Jordan saja.

3.2 Menentukan analisis kebutuhan

Sistem yang baik adalah suatu sistem yang benar, efisien dan mudah pengoperasiannya serta menarik. Agar tercapai tujuan membangun sistem yang baik, maka proses perlu disusun analisis kebutuhan yang meliputi:

a. Kebutuhan input

Input yang diperlukan dilihat dari persamaan perambatan panas. Dari (1) nampak bahwa syarat awal dan syarat batas merupakan nilai yang harus diberikan. Sehingga syarat awal dan syarat batas menjadi input. Dari (1) pula input yang lain adalah $k, \Delta t$, Δx , n sebagai jumlah langkah ke-t dan i sebagai jumlah langkah ke-x.

b. Kebutuhan proses

Dari pers (4), (5) dan (6) dapat disusun algoritma gabungan metode Thomas dan metode Gauss-Jordan serta disusun algoritma metode Gauss-Jordan saja. Adapun algoritma kedua prosedur adalah sebagai berikut.

Algoritma 1. Metode Thomas untuk penyederhanaan sistem

```
b = a[1,1]
f = a[1,2]
r = f*f
s =  (2*r) – (b*b)
k = log(n+1)/log(2)
p = k – 1
m = 2^p
l = m – 1
u = round(l)
DO q = 1 to u
      e =2*q
      z[e] = (f*(c[e-1,1]) + b[e+1,1]) – (b*c[e,1])
ENDDO
DO j = 1 to u
       jj = 2 * j
      a[j,j] = s
      a[j+1,j] = t
      a[j,j+1] = t
      c[j,1] = z[j,j]
      DO jj = 1 to u
             IF (a[j,jj] = ‘’)
                   a[j,jj] = 0
             ENDIF
      ENDDO
ENDDO
```

Algoritma 2. Metode Gauss-Jordan dan metode Thomas untuk menentukan *T* genap dan *T* ganjil.

```
k = (n + 2)/2
p = trunc(k)
u = n – p
{Algoritma  Metode  Gauss-Jordan  untuk  mencari  T
genap}
DO q = 1 to u
      Pivot = a[q,q]
      DO j =1 to (u+1)
            a[q,j] = a[q,j]/pivot
      ENDDO
      DO i =1 to u
            IF (i ≠ q)
                  dummy = (-1*a[i,q]/a[q,q]
                  DO j = 1 to (u + 1)
                        a[i,j]    =    (a[q,j]    *
dummy)/a[i,j]
                  ENDDO
            ENDIF
      ENDDO
ENDDO
DO ii = 1 to u
      v = 2*ii
      T[v] = a[ii,u+1)
ENDDO
```

```
{Algoritma Metode Thomas untuk mencari T ganjil}
DO jj = 1 to (u+1)
      e = 2*jj
      iii = e – 1
      IF (jj = 1)
            T[iii] = (c[iii,1] – (f*a[jj,u+1]))/b
      ELSE
      IF (jj = u + 1)
            T[iii] = (c[iii,1] – (f*a[jj-1,u+1))/b
      ELSE
            T[iii] = (c[iii,1] – (f*a[jj,u+1))/b
      ENDIF
ENDDO
```

c. Kebutuhan output

Sesuai dengan prinsip membangun sistem, maka peranan output juga penting. Minimal output dapat memperlihatkan hasil akhir. Dalam penelitian ini, outputnya berupa grafik 3-D, yaitu hubungan antara variabel temperatur (T) dengan variabel bebasnya x (jarak) dan t (waktu perambatan) dan analisis kinerja metode Thomas. Selain grafik adalah informasi tentang waktu eksekusi.

d. Kebutuhan perangkat lunak dan perangkat keras.

Dalam membangun sistem ada 2 hal tentang perangkat keras yang perlu diperhatikan, yang pertama adalah dengan spesifikasi apa sistem itu dibangun dan dengan spesikasi apa sistem itu dapat dijalankan. Sistem ini dibangun dengan perangkat keras komputer pentium 100 Mhz dengan RAM 32 MB dan dapat dijalankan dengan komputer pentium setara ke atas. Adapun perangkat lunak yang digunakan untuk membangun sistem adalah Borland Delphi 6 dan Matlab 6.5 dengan sistem operasi Windows 98.

3.3 Pembuatan perancangan sistem

Dalam penelitian ini karena yang menjadi tujuan adalah mencari efisiensi metode Thomas, maka dalam rancangan program adalah merancang menyelesaikan persoalan dengan dua buah penyelesaian, yaitu program dengan menggunakan efisiensi metode Thomas dan program yang penyelesaiannya hanya dengan metode Gauss-Jordan saja. Dalam program ini sebagai pembanding yang dapat dilihat melalui eksekusi komputer adalah apakah hasilnya sama dan kedua program tersebut bagaimana perbandingan waktu eksekusinya.

3.4 Membangun program komputer

Program komputer yang digunakan untuk membangun sistem ini adalah perangkat lunak Borland Delphi 6 dengan alasan bahwa Borland Delphi 6 merupakan bahasa komputasi teknis yang sangat populer dan sangat mudah digunakan serta mudah pula untuk dipahami struktur bahasanya [3] dan Matlab 6.5 untuk pembuatan grafik 3-D. Dalam penelitian ini karena listing programnya panjang, maka tidak dapat ditampilkan dalam makalah ini.

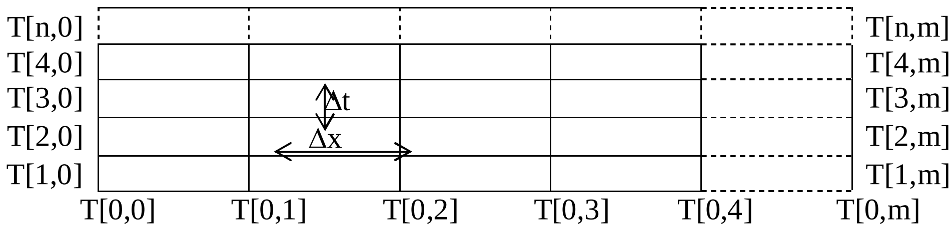
3.5 Pengujian program

Setelah sistem selesai dibangun, maka harus diuji apakah sistem dapat berjalan dengan baik dan mudah dioperasikan. Pengujian dilakukan secara detail disampaikan pada bab hasil dan pembahasan berikut ini.

4. Hasil dan Pembahasan

Dalam penelitian ini diambil obyek dari [4], yaitu suatu batang besi panjangnya 16 cm. Kedua ujungnya dipanasi dan temperatur di kedua ujung besi diamati untuk interval waktu tertentu (Δt). Batang besi didiskritisasi sebanyak nilai tertentu misalkan i sehingga Δx =

panjang besi dibagi *i*. Jika suhu besi sebelum dipanasi sebagai suhu awal pada tiap titik yang diskritisasi diketahui dan suhu pada ujung besi pad waktu *t* juga diketahui serta *k* sebagai koefisien panas juga diketahui, maka akan dapat diketahui temperatur besi pada titik-titik besi yang terdeskritisasi untuk waktu *t*. Nilai-nilai syarat awal, syarat batas, perubahan waktu dan perubahan jarak dapat digambarkan sebagai gambar jaringan titik pada gambar 1.



Gambar 1. Jaringan titik-titik pengamatan

Jika dimisalkan syarat awal T[0,i] = 10^0 C dimana i = 1, 2, …, 9 dan syarat batas T[j,0] naik 0.05^0 C setiap kenaikan Δt sebagai syarat batas kiri dan T[j,i] naik 0.08^0 C setiap Δt sebagai syarat batas kanan serta k = 0.835 cm^2/dt dan dimisalkan pula Δt = 1 dt serta Δx = 2 cm , maka dengan mensubstitusikan nilai-nilai tersebut ke dalam persamaan (3), maka terbentuk sistem persamaan linier untuk panjang besi 16 cm:

$$\begin{bmatrix} 1.4175 & -0.2087 & 0 & \cdots & 0 \\ -0.2087 & 1.4175 & -0.2087 & \cdots & 0 \\ 0 & -0.2087 & 1.4175 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1.4175 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.0979 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 12.1042 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (7)$$

Persamaan (7) diselesaikan dengan program komputer berbasis algoritma 1., maka dihasilkan sistem persamaan linier baru yang telah efisien. Persamaan tersebut ditampilkan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} B & A & 0 & \cdots & 0 \\ A & B & A & \cdots & 0 \\ 0 & A & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots (8)$$

Sistem persamaan linier (8) yang telah efisien diselesaikan dengan program komputer berbasis algoritma 2, maka dihasilkan *T*[1,1] = 10.117, *T*[1,2] = 9.999, *T*[1,3] = 9.999, *T*[1,4] = 9.999, *T*[1,5] = 9.999, *T*[1,6] = 10.000, *T*[1,7] = 10.011

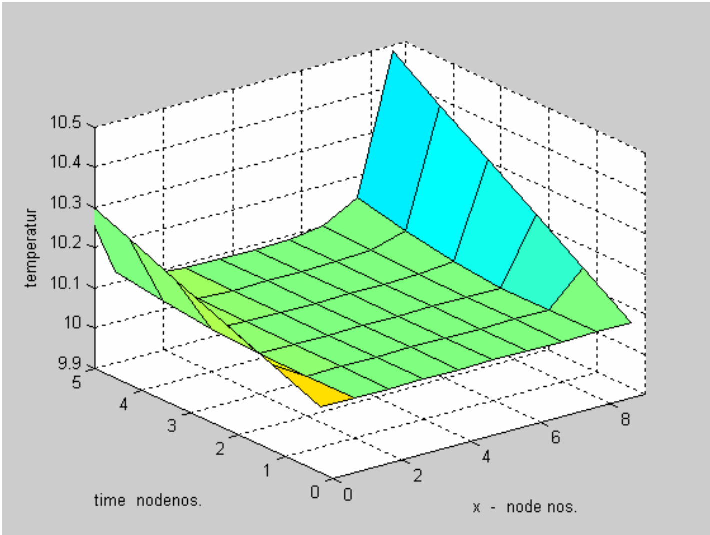
Proses yang sama diulangi terus menerus sampai dihasilkan nilai temperatur pada titik-titk batang besi yang terdiskritisasi untuk waktu *t*, yang hasil keseluruhannya ditampilkan pada tabel 1.

Tabel 1. Hasil perubahan temperatur pada titik-titik yang terdiskritisasi

T	*I* = 0	*i* = 1	*i* = 2	*i* = 3	*i* = 4	*i* = 5	*i* = 6	*i* = 7	*i* = 8
n = 0	10.000	10	10	10	10	10	10	10	10
n = 1	10.050	10.007	10.000	9.999	9.999	9.999	10.000	10.011	10.08
n = 2	10.100	10.019	10.001	9.999	9.999	9.999	10.006	10.046	10.26
n = 3	10.150	10.036	10.005	9.999	9.999	10.005	10.045	10.088	10.34

Dari tabel 1, di atas nampak ada angka yang tidak masuk akal, yaitu batang besi pada titik *i* ke 3, 4 dan 5 setelah dipanasi malah turun dari 10^0 menjadi 9.99^0. Hal ini memang karakteristik dari skema implisit, yaitu pada perhitungan awal temperatur pada titik-tertentu pada beberapa langkah akan kelihatan turun, tetapi setelah langkah t tertentu akan mulai terjadi kenaikan yang signifikan yang sesuai dengan keadaan yang sebenarnya.

Dengan persoalan yang sama jika nilai Δt dan Δx diperkecil menjadi per seratusnya, maka banyak titik-titik pada jejaring seperti gambar no.1 menjadi sembilan ratus titik kekanan dan lima ratus titik ke atas. Matriks yang terbentuk setiap kali perbahan waktu adalah matriks ukuran (899 x 899). Jika syarat awal dan syarat batas diberikan seperti nilai pada soal di atas pula, maka hasil perubahan temperatur pada titik-titik batang besi yang terdiskritisasi dan pada waktu *t* hasilnya merupakan grafik 3-D dengan sumbu-x berupa jarak antar titik yang terdiskritisasi, sumbu-y berupa waktu dan sumbu-z adalah temperatur. Grafik 3-D tersebut ditampilkan pada gambar 2.



Gambar 2. Grafik 3-D perubahan temperatur akibat perambatan panas

Persoalan dengan matriks besar tersebut, jika diselesaikan dengan metode Gauss-Jordan saja hasilnya sama seperti yang tertampil di gambar 2. Hanya saja ada perbedaan waktu eksekusinya, yaitu antara (00:09:10 x 5000 langkah) berbanding (00:48:500 x 5000 langkah). Jika sekali lagi Δt dan Δx diperkecil sehingga menghasilkan ukuran matriks 2001 x 2001, waktu eksekusi yang ditempuh perbandingannya menjadi 03:01:500 berbanding 32:53:400. Sehingga semakin besar ukuran matriks, perbandingan waktu eksekusi semakin mencolok.

Algoritma 1 dan algoritma 2 di atas, jika dianalisis dengan komplesitas program yaitu dengan memperhatikan banyak perulangan (*loop*) dapat disusun menjadi fungsi sebagai berikut:

- Penyelesaian dengan metode Thomas dan metode Jordan fungsi dari jumlah kompleksitasnya adalah:
  $$f(u) = u^3 + 2u^2 + 3u + 1 \qquad \ldots\ldots (9)$$
  dimana *u* adalah ukuran matriks setelah efisien.
- Penyelesaian dengan metode Jordan fungsi dari jumlah kompleksitasnya adalah:
  $$g(n) = n^3 + n^2 + n + 1 \qquad \ldots\ldots (10)$$
  dimana n adalah ukuran matriks yang sebenarnya.

Dari persamaan (9) dan (10) di atas dapat dibuat tabel tentang hubungan antara ukuran matriks dan besarnya kalang. Tabel tersebut ditampilkan pada tabel 2.

Tabel 2. Hubungan antara ukuran matriks dan besar kalang (loop)

Ukuran Matriks	*n*	*u*	*Banyak Kalang*	
			Metode Thomas dan Gauss-Jordan	***Metode Gauss-Jordan***
101 x 101	101	50	175.151	1.040.603
201 x 201	201	100	1.005.175	8.161.203
303 x 303	501	250	3.489.007	27.910.239
1001 x 1001	1001	500	125.501.501	1.004.006.003
2001 x 2001	2001	1.000	1.002.003.001	8.016.012.003

5. Kesimpulan

Hasil penelitian menghasilkan kesimpulan sebagai berikut:

a. Metode Thomas layak dijadikan metode untuk mengefisiensikan penyelesaian sistem persamaan linier, khususnya untuk matriks yang berukuran besar. Hasil penyelesaian dengan metode Thomas sama persis dengan penyelesaian yang hanya diselesaikan dengan metode Gauss-Jordan.
b. Semakin besar matriks dalam sistem persamaan linier semakin mencolok perbedaanya jika sistem hanya diselesaikan dengan metode Gauss-Jordan. Untuk matriks berukuran 2000 x 2000 perbandingan waktunya sekitar 1 : 12.
c. Penyebab metode Thomas dapat mengefisiensikan sistem, karena persoalan persamaan perambatan panas yang diselesaikan dengan metode beda hingga dengan skema implisit bentuknya adalah matriks tridiagonal, sehingga tidak memerlukan langkah pivoting, yaitu langkah menghindari terjadinya pembagi nol.
d. Dengan analisis kompleksitaspun juga terbukti bahwa banyaknya kalang antara gabungan metode Thomas dan metode Gauss-Jordan perbandingannya 1 : 8.

Daftar Pustaka

Triatmojo, B., ”Metode Numerik”, Betan Offset, Yogyakarta, 1996.

Golub, G.H., and Van Loan, C.F., ”Matrix Computation”, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland , 1983.

Alam, M. dan Agus, J., “Belajar Sendiri Borland Delphi 6.0”, PT.Elex Media Komputindo, Jakarta, 2001.

Chapra, S.T. and Canale, R.P., “Numerical Methods For Engineers”, McGraw-Hill, New York, 1998.

Jogiyanto, H.M., “Pengenalan Komputer”, Penerbit Andi Offset, Yogyakarta, 1995.