

SISTEM PERSEDIAAN MULTI ITEM DENGAN KENDALA INVESTASI DAN LUAS GUDANG

Elisa Kusrini

*Jurusan Teknik Industri, Fakultas Teknologi Industri, Universitas Islam Indonesia
Jl. Kaliurang Km. 14 Yogyakarta 55501
Telp. (0274) 89528, Faks. (0274) 895007ext. 148*

ABSTRACT

In practice, most inventory system accommodate more than one type of item. Under this situation the analysis of inventory problem is approached by treating each type of item independently. The problem becomes complicated when constrains are imposed in inventory system. Constrains normally arise because scarce of resources exist such as capital, storage space, and equipment capacities. This paper considered a multi item inventory system with 2 constrains: working capital and storage space restrictions. The Lagrangian method and The LIMIT technique is utilized to obtain optimal order quantity solution for constraining conditions. While The Lagrangian method transforms a constrained optimization problem into an unconstrained problem for higher dimension, The LIMIT Technique determines the relation of aggregate EOQ requirements to the limited resource available and revises all the lot sizes by the same proportion to bring the aggregate EOQ resources requirements within the limit. A case study of a multi item inventory system with constrains at PD Taru Martani Yogyakarta has been presented in this paper.

Keywords : multi item inventory system, constrains, the Lagrangian method, the LIMIT technique, optimal (economic) order quantity.

1. PENDAHULUAN

Pada kondisi riil, sebagian besar sistem persediaan (*inventory system*) yang ada di perusahaan mengakomodasikan lebih dari satu jenis item. Pada kondisi seperti ini, analisis inventory dilakukan dengan menghitung masing-masing item secara terpisah/independen dimana jumlah pemesanan ekonomis (*economic order quantity/EOQ*), optimal shortage dan reorder points dapat dihitung secara terpisah. Permasalahan persediaan akan semakin kompleks bila terdapat kendala seperti keterbatasan investasi, keterbatasan luas gudang, keterbatasan peralatan/equipment dan ketersediaan item yang akan dibeli [5]. Pembatas-pembatas tersebut akan mempengaruhi kuantitas order untuk setiap item.

Pada saat tidak ada pembatas dalam sistem inventori, optimasi keseluruhan (*global optimum*) merupakan penjumlahan dari optimasi setiap item (*local optimum*), tetapi bila terdapat pembatas dalam sistem inventory maka *global optimum* tidak selalu sama dengan agregate dari *local optimum* [1].

Terbatasnya jumlah anggaran dan atau luas gudang seringkali mengakibatkan pihak manajemen untuk membatasi kuantitas pemesanan, sehingga jumlah uang yang tertanam dalam inventory tidak melebihi jumlah anggaran yang tersedia. Bila perencanaan sistem inventory didasarkan pada strategi minimasi total biaya, maka pengurangan anggaran untuk inventory

seringkali menyebabkan kenaikan biaya total. Perbandingan antara kenaikan biaya dan keuntungan akibat penurunan kuantitas pemesanan akan memungkinkan pihak manajemen untuk mengevaluasi pembatas (*constrain*) yang ada.

Paper ini akan membahas sistem persediaan multi item dimana terdapat kendala investasi dan keterbatasan luas gudang. Pertama akan diuraikan pendekatan matematis dengan Metode Lagrange [1, 5] dan pendekatan LIMIT [2]. Selanjutnya akan diberikan contoh dengan studi kasus pada persediaan bahan baku tembakau di PD Taru Martani Yogyakarta.

2. MODEL MATEMATIS: METODE LAGRANGE

Dalam sistem inventory multi item, biaya inventori total pertahun diestimasi dari penjumlahan biaya total pertahun dari masing- masing item yang ada dalam sistem. Bila terdapat n item dalam sistem maka biaya totalnya:

$$TC(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = \sum_{j=1}^n (C_j D_j + A_j D_j / Q_j + i_j C_j Q_j / 2) \quad (1)$$

dengan

TC = total cost/biaya inventory total per tahun

Q_n = jumlah pemesanan untuk item n

C_j = harga beli per unit item j

D_j = tingkat permintaan per tahun

A_j = biaya replenishment order/biaya pesan

i_j = persentase biaya simpan

Bila terdapat keterbatasan modal yang tersedia, dimana jumlah item yang dibeli tidak boleh melebihi modal yang ada (B), maka berlaku persamaan berikut:

$$\sum_{j=1}^n C_j Q_j \leq B \quad (2)$$

Problem diatas dapat diformulasikan kedalam program nonlinier sebagai berikut

$$\text{Minimalkan } TC = \sum_{j=1}^n TC(Q_j) = \sum_{j=1}^n (A_j D_j / Q_j + i_j C_j Q_j / 2) \quad (3)$$

$$\text{dengan pembatas } \sum_{j=1}^n C_j Q_j \leq B \quad (4)$$

$$Q_j \geq 0$$

Untuk menyelesaikan model nonlinier diatas dapat digunakan pendekatan model Lagrange multiplier. Metode Lagrange mengasumsikan bahwa pemesanan

dilakukan secara simultan dan tidak mempertimbangkan adanya phasing order untuk masing-masing item.

2.1 Metode Lagrange Multiplier untuk Sistem Inventori Multi Item dengan Keterbatasan Investasi

Penyelesaian dengan metode Lagrange dilakukan dengan menyelesaikan problem pada persamaan (3) dengan mengabaikan pembatas pada persamaan (4), maka kuantitas pemesanan optimum didapatkan (dengan mengasumsikan $i_j = i$) pada persamaan (5) berikut.

$$Q_j^* = \sqrt{2A_j D_j / i C_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

Untuk mengetahui apakah Q_j^* optimum feasible dilakukan dengan mensubstitusikan nilai Q_j^* kedalam persamaan (4). Jika persamaan terpenuhi maka kuantitas pemesanan optimal adalah sebesar Q_j^* , Jika tidak maka metode Lagrange digunakan untuk mencari Q_j optimal. Hal ini dicapai dengan membuat persamaan Lagrange (Lagrangian expression = LE) sebagai berikut:

$$LE(Q_j, \lambda) = \sum_{j=1}^n (A_j D_j / Q_j + i C_j Q_j / 2) + \lambda (\sum_{j=1}^n C_j Q_j - B) \quad (6)$$

dimana λ adalah Lagrange multiplier. Dengan mengambil turunan pertama dari persamaan (6) terhadap Q_j, λ dan menyamakannya dengan nol maka diperoleh

$$Q_j^* = \sqrt{2A_j D_j / C_j (i + 2\lambda^*)} \quad (7)$$

dengan Q_j^* adalah kuantitas pemesanan optimal dengan metode Lagrange. Nilai λ^* diberikan oleh persamaan

$$\lambda^* = \frac{1}{2} (1/B \sum_{j=1}^n (\sqrt{2A_j D_j C_j})^2 - i/2) \quad (8)$$

Substitusi nilai λ^* kedalam persamaan (7) akan didapatkan

$$Q_j^* = B Q_j^* / \sum_{j=1}^n C_j Q_j^* = (B/E) Q_j^* \quad (9)$$

dimana Q_j^* didapatkan dari persamaan (5) dan

$$E = \sum_{j=1}^n C_j Q_j^* \quad (10)$$

Persamaan (9) mengindikasikan bahwa untuk permasalahan inventory dengan kendala modal, jumlah pemesanan optimum untuk masing-masing nilai Q_j^* yang didapatkan dari persamaan (5) dikalikan dengan faktor B/E . Hal ini

mengimplikasikan bahwa jumlah order harus dikurangi dengan faktor yang sama jika terdapat kelebihan kebutuhan terhadap jumlah uang yang tersedia. Prosedur ini dikenal dengan prosedur LIMIT yang akan diterangkan kemudian.

2.2 Metode Lagrange Multiplier untuk Sistem Inventori Multi Item dengan Keterbatasan Luas Gudang

Bila Luas gudang yang tersedia menjadi pembatas dalam sistem inventori, penentuan level pemesanan optimum dapat diselesaikan dengan Metode Lagrange. Perumusan masalah sebagai berikut.

$$\text{Minimalkan TC} = \sum_{j=1}^n \text{TC}(Q_j) = \sum_{j=1}^n (A_j D_j / Q_j + i_j C_j Q_j / 2) \quad (11)$$

$$\text{dengan pembatas } \sum_{j=1}^n w_j Q_j \leq W \quad (12)$$

$$Q_j \geq 0$$

dengan

w = kebutuhan luas gudang untuk masing-masing unit j

W = total luas gudang yang tersedia

Dengan prosedur yang sama dengan penjelasan pada keterbatasan investasi maka didapatkan jumlah pemesanan optimal

$$Q_j^* = \sqrt{2 A_j D_j / (i_j C_j + 2 \lambda \cdot w_j)}$$

$$\text{dan } Q_j^* = W Q_j^* / \sum_{j=1}^n C_j Q_j^* = (W/E) Q_j^* \quad (13)$$

$$\text{dengan } E = \sum_{j=1}^n w_j Q_j^* \quad (14)$$

Dengan λ diinterpretasikan secara ekonomis sebagai nilai marginal dari luas gudang dan berarti bahwa tambahan satu satuan luas gudang akan menghemat biaya simpan sebesar λ .

2.3 Pendekatan LIMIT untuk Sistem Inventori Multi Item dengan Kendala

Harty, Plossl dan Wight (1963) dalam [2] dan Narasimhan [3] memperkenalkan teknik optimasi kuantitas pemesanan dengan jumlah order/set up yang terbatas. Teknik ini disebut LIMIT (*Lot size Inventory Management Interpolation Technique*). Hoffmann (1964) dalam [2] memperluas pendekatan LIMIT untuk situasi dimana kebutuhan investasi (pada saat jumlah pemesanan sama dengan Economic Order Quantity (EOQ)) melebihi anggaran modal/investasi yang tersedia. Teknik LIMIT menentukan hubungan antara Jumlah investasi yang

dibutuhkan (pada saat jumlah pemesanan sama dengan EOQ) dan jumlah investasi yang tersedia. Pada saat terjadi keterbatasan investasi, kuantitas pemesanan optimum direvisi dengan cara mengalikan EOQ dengan proporsi (faktor tertentu) agar jumlah investasi yang diperlukan tidak melebihi jumlah investasi yang tersedia sebagaimana diberikan dalam persamaan (9) dan (13). Untuk kondisi keterbatasan investasi, Proporsi (multiplier) adalah perbandingan antara jumlah investasi yang tersedia dengan jumlah investasi yang dibutuhkan oleh EOQ. Untuk kondisi keterbatasan Luas gudang, proporsi (multiplier) adalah perbandingan antara luas gudang yang tersedia dengan luas gudang yang diperlukan untuk menyimpan barang sebanyak EOQ. Untuk sistem inventori multi item dengan satu kendala teknik LIMIT akan menghasilkan solusi jumlah pemesanan optimum yang sama dengan metode Lagrange.

3. STUDI KASUS MODEL INVENTORI MULTI ITEM DENGAN KENDALA INVESTASI DAN LUAS GUDANG

3.1 Studi Kasus dengan Kendala Investasi

Penerapan model sistem inventory multi item berkendala akan dilakukan dengan studi kasus sistem inventory bahan baku tembakau di PD Taru Martani Yogyakarta. PD Tarumartani adalah perusahaan yang bergerak dalam pembuatan cerutu dengan bahan baku utama tembakau. Ada 3 jenis tembakau yang digunakan untuk memproduksi cerutu yaitu tembakau untuk pembungkus luar (*deckblad*), untuk pembungkus dalam (*omblad*) dan untuk pengisi cerutu (*filler*) yang terdiri dari 6 jenis yaitu filler Besuki, Jember, Asepan, Havana, Brasil dan Connecticut.

Berdasarkan hasil peramalan didapatkan kebutuhan bahan baku untuk tahun 2005 dan dari data perusahaan didapatkan besarnya biaya pesan, harga bahan baku dan persentase biaya simpan (*fractional holdingcost*) yang akan disajikan dalam Tabel 1 [4].

Tabel 1. Data permintaan bahan baku tahun 2005 dan biaya-biaya terkait dengan inventori

No.	Jenis bahan baku	Permintaan (Dj) dalam Kg	Biaya pesan (Aj) rupiah	Harga beli (Cj)	Persentase biaya simpan (i)	Biaya simpan/ tahun (i Cj)
1	Deckbald	10190	2.035.000	95.000	3.2 %	3040
2	Omblad	7643	2.035.000	45.000	3.2 %	1440
3	Filler Besuki	3231	2.035.000	25.000	3.2 %	800
4	Filler Jember	2290	2.035.000	23.500	3.2 %	752
5	Filler Asepan	2117	2.035.000	20.000	3.2 %	640
6	Filler Havana	774	2.035.000	127.000	3.2 %	4064
7	Filler Brasil	607	2.035.000	132.000	3.2 %	4224
8	Filler Connecticut	345	2.035.000	125.000	3.2 %	4000

Bila diasumsikan bahwa investasi untuk inventory maksimum sebesar Rp. 1000.000.000, maka besarnya pemesanan optimum dapat dihitung sebagai berikut. Formulasikan permasalahan dalam minimasi biaya inventory

$$\text{Minimalkan TC} = \sum_{j=1}^n \text{TC}(Q_j) = ((2.07 \times 10^{10})/Q_1 + 1520Q_1 + (1.55 \times 10^{10})/Q_2 + 720Q_2 + (6.57 \times 10^9)/Q_3 + 400Q_3 + (4.66 \times 10^9)/Q_4 + 376Q_4 + (4.32 \times 10^9)/Q_5 + 320Q_5 + (1.57 \times 10^9)/Q_6 + 2032Q_6 + (1.23 \times 10^9)/Q_7 + 2112Q_7 + (7.02 \times 10^9)/Q_8 + 2000Q_8)$$

dengan pembatas:

$$95000Q_1 + 45000Q_2 + 25000Q_3 + 23500Q_4 + 20000Q_5 + 127000Q_6 + 132000Q_7 + 125000Q_8 \leq 10^9$$

$$Q_j \geq 0$$

Untuk menyelesaikan model di atas, pertama dihitung besarnya pemesanan optimum dengan menggunakan persamaan (5) kemudian diperiksa apakah dengan pemesanan optimal kendala investasi bisa terpenuhi. Jika kendala investasi terpenuhi maka pemesanan optimum akan menjadi pemesanan optimum pada sistem inventory, jika tidak maka metode Lagrange akan digunakan untuk menghitung jumlah pemesanan optimum yang memenuhi kendala investasi yang ada. Tabel 2 berisi tentang jumlah pemesanan optimum yang dihitung dengan Persamaan (5) dan jumlah investasi yang dibutuhkan.

Tabel 2. Kuantitas Pemesanan optimum dan kebutuhan Investasi

Jenis bahan baku	EOQ _j * (kg)	Kebutuhan investasi (EOQ _j * x C _j) (rupiah)
Deckbald	3694	350.930.000
Omblad	4648	209.160.000
Filler Besuki	4054	101.350.000
Filler Jember	3521	82.743.500
Filler Asepan	3669	73.380.000
Filler Havana	880	111.760.000
Filler Brasil	765	100.980.000
Filler Connecticut	593	74.125.000
Total investasi		1.104.428.500

Dari Tabel 2 diketahui bahwa jumlah pemesanan optimum tidak feasible karena melanggar kendala investasi yang tersedia. Jumlah pemesanan optimum yang feasible dihitung dengan menggunakan metode Lagrange sebagai berikut.

Hitung besarnya λ dengan menggunakan persamaan (8).

$$\lambda^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} \sum_{j=1}^n (\sqrt{2A_j D_j C_j})^2 - i/2 \right)$$

$$\lambda^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10^9} (\sqrt{62769128} + \sqrt{37414107} + \sqrt{18131581} + \sqrt{14799562} + \sqrt{13127216} + \sqrt{20001821} + \sqrt{18058368} + \sqrt{13248348})^2 - 0.032/2 \right)$$

$$\lambda^* = \frac{1}{2} (1/10^9 \times 197550131)^2 - 0.016 = 0.0035$$

substitusikan nilai λ^* kedalam persamaan (10) sehingga didapatkan nilai pemesanan optimum dan kebutuhan Investasi yang feasible yang diberikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Kuantitas pemesanan optimum dengan metode Lagrange

Jenis bahan baku	EOQ _j * feasible (kg)	Kebutuhan investasi (rupiah)
Deckbald	3343	317585000
Omblad	4206	189270000
Filler Besuki	3669	91725000
Filler Jember	3187	74894500
Filler Asepan	3320	66400000
Filler Havana	796	101092000
Filler Brasil	692	91344000
Filler Connecticut	537	67125000
Total investasi		999.435.500

Besarnya λ memiliki pengertian ekonomi yang cukup penting, yaitu merepresentasikan kenaikan persentase dari holding cost.

Kuantitas pemesanan optimum dapat juga ditemukan dengan menggunakan teknik LIMIT yaitu dengan menggunakan persamaan (9) yang mengindikasikan bahwa untuk permasalahan inventory dengan kendala modal, jumlah pemesanan optimum untuk masing-masing nilai Q_j^* yang didapatkan dari persamaan (5) dikalikan dengan faktor B/E . Hal ini mengimplikasikan bahwa jumlah order harus dikurangi dengan faktor yang sama jika terdapat kelebihan kebutuhan terhadap jumlah uang yang tersedia.

Sebagai contoh, perhitungan EOQ^* untuk tembakau filler Havana adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 QL^* &= (B/E)Q_j^* \\
 Q_{Havana}^* &= (1.000.000.000/1.104.428.500) \times 880 \\
 &= 796 \text{ unit}
 \end{aligned}$$

Untuk jenis tembakau yang lain hasilnya sama dengan yang diperoleh dari metode Lagrange (Tabel 3.)

3.2 Studi Kasus Dengan Kendala Luas Gudang

Bila Luas gudang yang tersedia menjadi pembatas dalam sistem inventory, penentuan level pemesanan optimum dapat diselesaikan dengan Metode Lagrange atau pendekatan teknik LIMIT. Sebagai contoh akan digunakan kasus pada PD Taru Martani dengan mengasumsikan bahwa luas gudang yang tersedia 75m³. Bahan baku tembakau disimpan dengan cara dikemas dalam keranjang dengan dimensi 50cmx50cmx60cm (volume=0.15m³ per keranjang) dengan berat per keranjang sekitar 40 kg. Sistem penyimpanan dengan cara menumpuk keranjang dalam gudang. Besarnya pemesanan optimum dapat dihitung sebagai berikut.

Formulasikan permasalahan dalam minimasi biaya inventori

$$\text{Minimalkan } TC = \sum_{j=1}^n TC(Q_j) = ((2.07 \times 10^{10})/Q_1 + 1520Q_1 + (1.55 \times 10^{10})/Q_2 + 720Q_2 + (6.57 \times 10^9)/Q_3 + 400Q_3 + (4.66 \times 10^9)/Q_4 + 376Q_4 + (4.32 \times 10^9)/Q_5 + 320Q_5 + (1.57 \times 10^9)/Q_6 + 2032Q_6 + (1.23 \times 10^9)/Q_7 + 2112Q_7 + (7.02 \times 10^8)/Q_8 + 2000Q_8)$$

dengan pembatas:

$$0.15(Q_1/40 + Q_2/40 + Q_3/40 + Q_4/40 + Q_5/40 + Q_6/40 + Q_7/40 + Q_8/40) \leq 75$$

$$Q_j \geq 0$$

Untuk menyelesaikan model diatas, hitung besarnya pemesanan optimum dengan menggunakan persamaan (5) kemudian periksa apakah dengan pemesanan optimal kendala luas gudang terpenuhi. Jika kendala luas gudang terpenuhi maka pemesanan optimum akan menjadi pemesanan optimum pada sistem inventori, jika tidak maka metode Lagrange atau teknik LIMIT akan digunakan untuk menghitung jumlah pemesanan optimum yang memenuhi kendala luas gudang yang ada. Tabel 4 berisi tentang Jumlah pemesanan optimum yang dihitung dengan Persamaan (5) atau persamaan (9) dan luas gudang yang dibutuhkan.

Tabel 4. Kuantitas pemesanan optimum dan kebutuhan luas gudang

Jenis bahan baku	EOQ [*] (kg)	Kebutuhan luas gudang (EOQ [*] /40x0.15) (m ³)	EOQ [*] dengan metode Lagrange (atau LIMIT) (kg)	Kebutuhan luas gudang (m ³)
Deckbald	3694	13.80	3387	12.75
Omblad	4648	17.40	4262	15.90
Filler Besuki	4054	15.15	3717	13.95
Filler Jember	3521	13.20	3229	12.15
Filler Asepan	3669	13.80	3364	12.60
Filler Havana	880	3.30	807	3.00
Filler Brasil	765	2.85	701	2.55
Filler Connectitut	593	2.25	544	2.10
Total luas gudang		81.75		75.00

4. PENUTUP

Pada sistem inventori multi item , analisis inventory dapat dilakukan dengan menghitung masing-masing item secara terpisah/independen. Permasalahan persediaan akan semakin kompleks bila terdapat kendala seperti keterbatasan investasi, keterbatasan luas gudang atau keterbatasan peralatan/equipment. Metode Lagrange atau Metode LIMIT dapat digunakan untuk menentukan jumlah pemesanan optimum bila dalam sistem terdapat kendala. Untuk sistem inventori multi item dengan satu kendala teknik LIMIT akan menghasilkan solusi jumlah pemesanan optimum yang sama dengan metode Lagrange.

PUSTAKA

- [1] Elsayed, E. A. (1994) *Analysis and Control of Production Systems*, Edisi 2, Prentice-Hall, New Jersey.
- [2] Fogarty, D. (1991) *Production and Inventory Management*, Edisi 2, South-Western Publishing, Cincinnati, Ohio.
- [3] Narasimhan, S. (1995) *Production Planning and Inventory Control*, Edisi 2, Prentice-Hall, New Jersey.
- [4] Sanyoto, B. (2004) Kontrol Bahan Baku Cerutu dengan Pendekatan Inventory Sistem Pemesanan Multi Item: Studi Kasus pada PD. Taru Martani, Yogyakarta.
- [5] Tersine, R. (1994) *Principles of Inventory and Materials Management*, Edisi 4, Prentice-Hall, New Jersey.